Exercices de Mécanique n°1 : Cinématique

Exercice 1 Pour calculer cette masse, il faut considérer un élément de volume d^3V dont la masse serait $d^3m = \rho(r)d^3V$. De plus, nous allons utiliser les coordonnées sphériques, et donc on peut écrire directement :

$$\begin{aligned}
M &= \int\int\int d^3m \\
&= \int_{\rho=0}^{R_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \rho_0\left(1+\frac{r}{R_0}\right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= 2\rho_0 \int_{\rho=0}^{R_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(1+\frac{r}{R_0}\right) r^2 dr d\varphi \\
&= 4\pi\rho_0 \int_{\rho=0}^{R_0}\left(1+\frac{r}{R_0}\right) r^2 dr \\
&= 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3}+\frac{r^4}{4R_0}\right]_0^{R_0} \\
&= \frac{7}{3}\pi\rho_0 R_0^3
\end{aligned}$$

Exercice 2 **2.1** En appliquant le théorème de Thalès, on a immédiatement :

$$r = R_0\frac{h-z}{h}$$

2.2 Ce cylindre a pour base un disque d'aire πr^2 et pour hauteur dz. On a donc immédiatement :

$$dV = \pi R_0^2\frac{(h-z)^2}{h^2}dz$$

2.3 Il suffit d'intégrer l'expression précédente entre 0 et h :

$$\begin{aligned}
V &= \pi R_0^2\int_0^h \frac{(h-z)^2}{h^2}dz \\
&= \pi R_0^2\left[-\frac{(h-z)^3}{3h^2}\right]_0^h \\
&= \pi R_0^2\frac{h}{3}
\end{aligned}$$

On retrouve le volume du cône habituel.

Exercice 3 On part des coordonnées cylindriques où :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$$

3.1 On a par simple projection les deux relations suivantes :

$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\overrightarrow{e_y} \qquad \overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y}$$

3.2 On peut alors dériver sans problèmes, puisque $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ sont, eux, des vecteurs fixes :

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} &= -\dot\varphi\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \dot\varphi\cos\varphi\overrightarrow{e_y} = \dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} \\
\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} &= -\dot\varphi\cos\varphi\overrightarrow{e_x} - \dot\varphi\sin\varphi\overrightarrow{e_y} = -\dot\varphi\overrightarrow{e_\rho}
\end{aligned}$$

Grâce à ces deux relations, on va pouvoir retrouver la vitesse :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \frac{d\rho\overrightarrow{e_\rho}}{dt} \\
&= \dot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} \\
&= \dot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}
\end{aligned}$$

De même pour l'accélération :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= \frac{d\dot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} \\
&= \ddot\rho\overrightarrow{e_\rho} + \dot\rho\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \dot\rho\dot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + \rho\ddot\varphi\overrightarrow{e_\varphi} - \rho\dot\varphi^2\overrightarrow{e_\rho} \\
&= (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\overrightarrow{e_\rho} + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}
\end{aligned}$$

Exercice 4 On se place dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ), avec les vecteurs élémentaires associés $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$. On appelle H le projeté orthogonal de M dans le plan xOy.

4.1 Reprenons le vecteur $\overrightarrow{e_\rho}$ des coordonnées cylindriques. En se plaçant dans le plan OMH, on peut voir que :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_z} + \sin\theta\overrightarrow{e_\rho} \qquad \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_z} + \cos\theta\overrightarrow{e_\rho}$$

De plus, dans l'exercice 3 on avait :

$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\overrightarrow{e_y} \qquad \overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y}$$

En réinjectant ces deux expressions dans les premières, on obtient le résultat demandé :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_r} &= \sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\overrightarrow{e_z} \\
\overrightarrow{e_\theta} &= \cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\overrightarrow{e_z} \\
\overrightarrow{e_\varphi} &= -\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y}
\end{aligned}$$

4.2 Il suffit de dériver par rapport au temps. Le principe étant le même pout les trois vecteurs, faisons le juste pour $\overrightarrow{e_r}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} &= \dot\theta\cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} - \dot\varphi\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \dot\theta\cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_y} - \dot\theta\sin\theta\overrightarrow{e_z} \\
&= \dot\theta(\cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\overrightarrow{e_z}) + \dot\varphi\sin\theta(-\sin\varphi\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\overrightarrow{e_y}) \\
&= \dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}
\end{aligned}$$

On trouve de même les relations suivantes :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot\theta\overrightarrow{e_r} + \dot\varphi\cos\theta\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = -\dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_r} - \dot\varphi\cos\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

4.3 En ce qui concerne la vitesse, il suffit d'écrire que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$, et que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \dot r\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dr} \\
&= \dot r\overrightarrow{e_r} + r(\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi})
\end{aligned}$$

Pour l'accélération, le calcul est du même type, mais un peu plus fastidieux :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= \frac{d\dot r\overrightarrow{e_r} + r(\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi})}{dt} \\
&= \ddot r\overrightarrow{e_r} + \dot r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \dot r(\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}) + r(\ddot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\theta\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} + \ddot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} + \dot\varphi\dot\theta\cos\theta\overrightarrow{e_\varphi} + \dot\varphi\sin\theta\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}) \\
&= \ddot r\overrightarrow{e_r} + \dot r(\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}) + \dot r(\dot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}) + \\
&\quad \Big[r[\ddot\theta\overrightarrow{e_\theta} + \ddot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} + \dot\varphi\dot\theta\cos\theta\overrightarrow{e_\varphi} + \dot\theta(-\dot\theta\overrightarrow{e_r} + \dot\varphi\cos\theta\overrightarrow{e_\varphi}) + \dot\varphi\sin\theta(-\dot\varphi\sin\theta\overrightarrow{e_r} - \dot\varphi\cos\theta\overrightarrow{e_\theta})] \\
&= (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\dot\varphi^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2)\overrightarrow{e_\theta} + (2\dot r\dot\varphi\sin\theta + r\ddot\varphi\sin\theta + 2r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)\overrightarrow{e_\varphi}
\end{aligned}$$

Exercice 5 **5.1** On trouve immédiatement que $\dot x^2 + \dot y^2 = R_0^2$. On a donc un mouvement circulaire dans le plan xOy.

5.2 Le système de coordonnées le plus adapté est alors évidemment le système de coordonnées cylindriques.

5.3 On a alors immédiatement, puisque de façon générale $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$:

$$\rho = R_0 \qquad \varphi = \omega t \qquad z = z$$

On a un mouvement hélicoïdal.

Exercice 6 Mouvement oscillatoire dérivant

6.1 Il suffit d'intégrer l'expression de l'accélération, sans oublier les constantes d'intégration :

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{a_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + \text{Cste}\right)\overrightarrow{e_x}$$

Or à $t = 0$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, donc Cste $= -\frac{a_0}{\omega}\sin\varphi$:

$$\overrightarrow{v} = \frac{a_0}{\omega}\left(\sin(\omega t + \varphi) - \sin\varphi\right)\overrightarrow{e_x}$$

6.2 L'intégrale du sinus est nul sur une période, il ne reste donc plus que le terme constant. On trouve directement :

$$< \overrightarrow{v} >= -\frac{a_0}{\omega} \sin \varphi t$$

6.3 On a un mouvement oscillant mais donc la position moyenne possède un mouvement rectiligne uniforme.

Exercice 7 Mouvement sur une cardioïde.

7.1 On a simplement :

$$\overrightarrow{dl} = d\rho \overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi \overrightarrow{e_\varphi}$$

7.2 On a :

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\rho_0 \sin \varphi d\varphi\right)^2 + \frac{\rho_0^2}{4}\left(1 + \cos \varphi\right)^2 d\varphi^2} \\
&= \frac{\rho_0 d\varphi}{2}\sqrt{\sin^2 \varphi + 1 + \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi} \\
&= \frac{\rho_0 d\varphi}{2}\sqrt{2 + 2 \cos \varphi} \\
&= \frac{\rho_0 d\varphi}{2}\sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \\
&= \rho_0 \left|\cos \frac{\varphi}{2}\right| d\varphi
\end{aligned}$$

7.3 ds étant le module du déplacement élémentaire le long de la courbe, il suffit d'"additionner" tous ces petits déplacements élémentaires, et donc d'intégrer :

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \rho_0 \left|\cos \frac{\varphi}{2}\right| d\varphi \\
&= 2\rho_0 \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi \\
&= 2\rho_0 \left[2 \sin \frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= 4\rho_0
\end{aligned}$$

7.4 On voit qu'on va refaire les mêmes calculs que pour l'évaluation de ds. On a alors :

$$v = \frac{ds}{dt} = \rho_0 \left|\cos \frac{\varphi}{2}\right| \frac{d\varphi}{dt}$$

Exercice 8 La voix de son Maître

8.1 Une projection montre que $\dot{x} = v\cos\theta$ et que $\dot{y} = v\sin\theta$

De plus, la position du chien est donnée par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ soit en projection :

$$x = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{e_x} = v_1 t - r\cos\theta \quad ; \quad y = -r\sin\theta$$

puisque la position du maître vaut $\overrightarrow{OA} = v_1 t\overrightarrow{e_x}$.

On en déduit en dérivant la première relation que :

$$\dot{x} = v_1 - \dot{r}\cos\theta + r\dot{\theta}\sin\theta$$

et la seconde que :

$$\dot{y} = -\dot{r}\sin\theta - r\dot{\theta}\cos\theta$$

En isolant $r\dot{\theta}$ dans la seconde, on trouve :

$$r\dot{\theta} = -\frac{(\dot{r}+v)\sin\theta}{\cos\theta} = -(\dot{r}+v)\tan\theta$$

qui mène en remplaçant dans la première, à :

$$v\cos\theta = v_1 - \dot{r}\cos\theta - \dot{r}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - v\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

soit en multipliant tout par $\cos\theta$:

$$v\cos^2\theta = v_1\cos\theta - \dot{r} - v\sin^2\theta$$

et donc :

$$\boxed{\dot{r} = v_1\cos\theta - v}$$

En réinjectant cette expression dans celle de $r\dot{\theta}$,on trouve :

$$\boxed{r\dot{\theta} = -(v_1\cos\theta - v + v)\tan\theta = -v_1\sin\theta}$$

8.2 L'élimination de dt se fait en faisant le rapport de la première par la seconde :

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{v}{v_1\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Pour vérifier que la solution proposée fonctionne, calculons :

$$\frac{dr}{d\theta} = d\left[\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\tan^{\frac{v}{v_1}}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{v}{2v_1}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\tan^{\frac{v}{v_1}-1}\frac{\theta}{2}\right]$$

ce qui, multiplié par $\frac{1}{r} = \frac{sin\theta}{d\tan^{v/v_1}\frac{\theta}{2}}$, donne :

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{v}{2v_1}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}}$$

Or $\cos^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2}$ Ce qui mène bien à :

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{v}{v_1\sin\theta}$$

Cette solution vaut bien d quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui est conforme aux conditions initiales.

8.3 Lorsque θ tend vers 0, $\sin\theta \approx \theta$ et $\tan\theta/2 \approx \frac{\theta}{2}$ donc $r \approx \frac{d}{2^{v/v_1}}\theta^{\frac{v}{v_1}-1}$ On a donc deux possibilités :

- si $v > v_1$ (le chien va plus vite que le maître), alors r tend vers zéro lorsque θ tend vers zéro : le chien rattrape le maître.
- si $v_1 < v$ (le maître va plus vite), alors r tend vers plus l'infini : le chien va finir sur l'axe x, mais restera en arrière de son maître.

8.4 On sait que $r\dot{\theta} = -v_1 \sin\theta$, ce qui mène à :

$$\boxed{dt = -\frac{d}{v_1 \sin^2\theta} \tan^{\frac{v}{v_1}} \frac{\theta}{2} d\theta}$$

Il faut que $v > v_1$ pour que le chien rattrape son maître. Initialement, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et au final 0, donc le temps mis pour rattraper le maître vaut :

$$T = \int_{\pi/2}^{0} -\frac{d}{v_1 \sin^2\theta} \tan^{\frac{v}{v_1}} \frac{\theta}{2} d\theta$$

ce qui coïncide bien avec l'expression de l'énoncé, avec $\lambda = \frac{v}{v_1}$.

On a donc :

$$T = \frac{v v_1}{v^2 - v_1^2}$$

qui n'a de sens (c'est-à-dire est positif) si $v > v_1$.