Des images chargées de sens

4.7 Théorie des images

La théorie des images ne s'explique que par le respect des conditions aux limites et de l'équipotentialité sur un conducteur parfait lorsqu'on trace la cartographie ("mapping") du champ électrique et de la fonction de potentiel d'un dipôle électrique comme celle de la figure 4.8. Le dipôle électrique étant constitué d'une charge $+Q$ et d'une charge $-Q$, la charge nette est nulle.

On se rend compte qu'en considérant le plan milieu et normal au segment reliant les deux charges :

- le champ électrique est perpendiculaire en tout point du plan ;
- le plan correspond à une équipotentielle.

Ainsi, en plaçant un plan conducteur parfait exactement à la position de ce plan, la cartographie du champ électrique et de la fonction de potentielle ne serait nullement affectée. Si maintenant, on retire la charge $-Q$ par exemple, le champ électrique devient nul automatiquement du côté de la charge négative mais demeure inchangé de l'autre côté du plan conducteur.

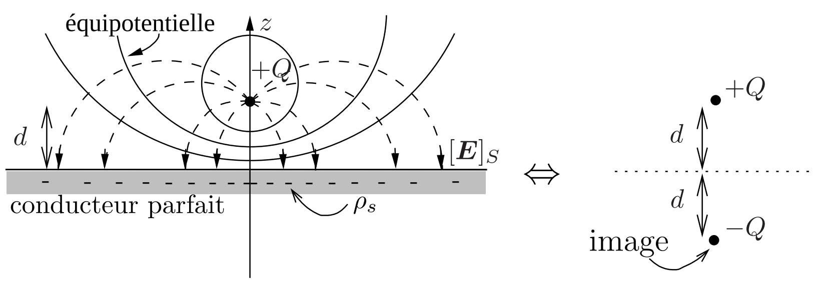

FIG. 4.19 – Théorie des images sur une charge électrique $+Q$.

En conséquence, mettre un plan conducteur parfait à côté d'une charge électrique correspond à simuler une charge de signe opposé à une distance équivalente sous le plan conducteur. C'est l'image de la charge électrique statique comme le résume la figure 4.19. En fait, la charge image est créée par une distribution non-uniforme de la densité surfacique de charges ρ_s à la surface du conducteur. Cette densité de charges est de même signe que la charge image et sa valeur dépend de l'intensité du champ de déplacement $\boldsymbol{D}$ à cette position.

En présence de plusieurs charges électriques, le plan conducteur parfait simulera autant de charges de l'autre côté avec une même configuration, de mêmes grandeurs mais de signes opposés. On comprend facilement qu'une densité linéaire ρ_l, surfacique ρ_s ou volumique ρ de charges peut être imagée de la même manière, toujours avec le signe opposé.

Exemple 4.12

Une charge linéaire infinie ayant une densité ρ_l est placée parallèlement à une distance d d'un plan conducteur. Pour se fixer les idées, la charge linéaire est à $(x = 0, z = d)$ et le conducteur est à $z = 0$.

► Trouvez l'expression de la densité surfacique de charges à la surface du conducteur.

On sait que $\rho_s = -[D_\perp]_S = -\epsilon[E_\perp]_S$ par l'application de la condition aux limites du champ électrique sur la surface S. Or, selon ce qui a été trouvé à l'exemple 4.1, le champ électrique produit par une charge linéaire infinie vaut[1] :

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r}\boldsymbol{a}_r$$

avec $r^2 = d^2 + y^2$.

La charge image produit un champ électrique de même magnitude $E_- = E_+$. Remarquons que l'image de la charge annule la composante tangentielle du champ électrique sur le conducteur afin que soit respecté les condition aux limites. Le champ total est la somme vectorielle des deux champs soit, dans le plan $z = 0$:

$$[E_\perp]_S = \left|[\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-]_{z=0}\right| = 2E_+ \cos\theta \ .$$

L'angle θ représente l'angle d'inclinaison entre le champ électrique et la normale $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_z$ du plan conducteur. Son cosinus s'exprime aisément en fonction de d et y puisque $\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+y^2}}$.

On obtient finalement

$$[E_\perp]_S = \frac{\rho_l d}{\pi\epsilon(d^2+y^2)}$$

donc

$$\rho_s = -\frac{\rho_l d}{\pi(d^2+y^2)} \ .$$

Jusqu'ici, la discussion des images a été limitée à une distribution statique des charges électriques. On peut l'étendre à un mouvement de charges.

En effet, une charge électrique positive qui se déplace vers la droite à une distance contante d'un plan conducteur produit une image d'une charge électrique négative se déplaçant aussi vers la droite, à même vitesse. Ceci est équivalent à un mouvement d'une charge positive vers la gauche. Par extension, l'image d'un courant – lequel est formé par un flot continu de charges en mouvement– parallèle à un plan conducteur est un courant de même amplitude mais de sens opposé.

Cependant, un déplacement d'une charge positive vers le haut perpendiculairement à un plan conducteur engendre une image d'une charge négative s'éloignant vers le bas. Ainsi, un élément de courant à la verticale vers le haut produit une image d'un élément de courant à la verticale aussi orienté vers le haut.

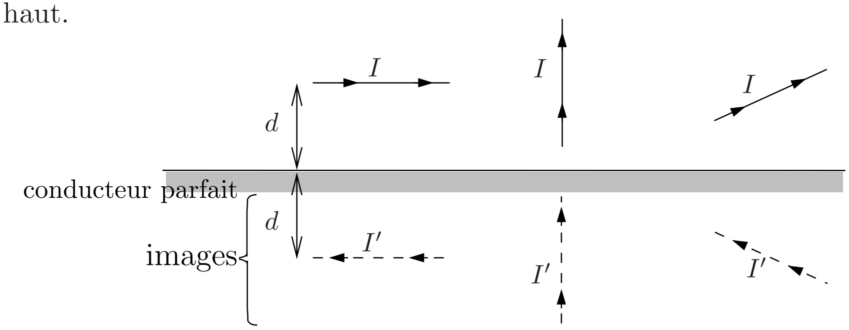

Fig. 4.20 – Théorie des images sur des éléments de courant électrique.

L'image d'un courant circulant à un angle arbitraire par rapport à un plan conducteur est déduit en résolvant les composantes parallèles et perpendiculaires, tel que montré sur la figure 4.20

[1] Il suffit de comprendre que la densité linéaire équivaut à $\rho_l = \rho(\pi a^2)$ i.e. le produit de la densité volumique par la surface du fil.