

## IV - Quelques théorèmes généraux de l'électromagnétisme

\*\*\*\*\*

### D) Le Théorème de POYNTING

Il s'agit d'un théorème déduit immédiatement des équations de MAXWELL, et qui en montre les propriétés énergétiques.

Effectuons le produit scalaire de chacun des membres de l'équation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{IV-1})$$

par le vecteur champ électrique. Nous obtenons :

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (\text{IV-2})$$

Effectuons le produit scalaire de chacun des membres de l'équation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{IV-3})$$

par le vecteur induction magnétique :

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{H} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} \quad (\text{IV-4})$$

et retranchons membres à membres les deux relations obtenues : (IV-2) – (IV-4) :

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{E} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{H} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) \quad (\text{IV-5})$$

On reconnaît dans cette expression :

- Une expression vectorielle qui peut se mettre sous la forme :

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{E} - (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) \quad (\text{IV-6})$$

- L'énergie électromagnétique totale  $\partial W$  contenue dans l'élément de volume  $dv = dx dy dz$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2) = \partial W \quad (\text{IV-7})$$

D'où l'écriture condensée de l'égalité (IV-5), qui constitue le théorème de POYNTING :

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (\text{IV-8})$$

Cette relation traduit le fait que la variation de l'énergie électromagnétique contenue dans un volume élémentaire  $\partial W$ , pendant un temps très bref  $dt$ , est égale à l'énergie qui s'est échappée de cet élément de volume à travers ses parois, représenté par le terme  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})$  ; augmentée de l'énergie qui a été convertie par effet joule représentée par le terme  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ .

Lorsqu'on souhaite connaître la puissance instantanée  $P(t)$  qui s'échappe d'un volume  $V$ , entouré par une surface fermée  $S$ , il suffit de sommer la relation (IV-8) sur le volume  $V$  :

$$P(t) = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) dV = \iint_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) ds \quad (IV-9)$$

Le vecteur :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (IV-10)$$

est appelé vecteur de POYNTING réel. On déduit de la relation (IV-9) que sa norme est homogène à une densité surfacique de puissance. Il s'agit d'une valeur instantanée.

On peut également définir un vecteur de POYNTING complexe :

$$\underline{\vec{P}} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{H}}^* \quad (IV-11)$$

dont la partie réelle représente la valeur moyenne du vecteur de POYNTING réel sur une ou plusieurs période :

$$\text{Re}\{\underline{\vec{P}}\} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{P}(t)| dt \quad (IV-12)$$

et il est intéressant d'illustrer cette relation sur un cas particulier :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad \text{et donc} \quad \underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t) \quad (IV-13)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et donc} \quad \underline{\vec{H}} = \vec{H}_0 \exp(j\omega t + \varphi) \quad (IV-14)$$

d'où le vecteur de POYNTING réel :

$$\vec{P} = (\vec{E}_0 \wedge \vec{H}_0) \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \quad (IV-15)$$

et le vecteur de POYNTING complexe :

$$\underline{\vec{P}} = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 \exp(j\omega t) \wedge \vec{H}_0 \exp(-j(\omega t + \varphi))) = \frac{1}{2} (\vec{E}_0 \wedge \vec{H}_0) \exp(-j\varphi) \quad (IV-16)$$

La relation (IV-12) est vérifiée : la partie réelle du vecteur de POYNTING complexe (IV-16) est égale à la valeur moyenne du vecteur de POYNTING réel (IV-15).

On peut évaluer la puissance rayonnée par un dispositif  $P_r$  en intégrant la relation précédente sur une surface fermée délimitant un volume qui contient les sources de rayonnement :

$$P_r = \iint_S \operatorname{Re} \{ \vec{P} \} d\vec{s} \quad (\text{IV-17})$$

En choisissant une surface sphérique suffisamment loin des sources pour que l'onde sphérique soit devenue localement plane, la relation (IV-17) se simplifie car le vecteur de POYNTING et l'élément de surface sont colinéaire.

De plus, pour une onde plane, avec les notations habituelles :

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} (\vec{U} \wedge \vec{E}) \quad (\text{IV-18})$$

et donc :

$$P_r = \frac{1}{2\eta} \iint_S E_0^2 ds \quad (\text{IV-19})$$

## II) Le Théorème de réciprocité

La démonstration de certaines propriétés des circuits passifs linéaires fait appel à un théorème peu utilisé appelé théorème de réciprocité. Ce théorème se généralise à l'électromagnétisme de MAXWELL sous l'appellation de théorème de réciprocité de LORENTZ. Il est à la base d'une propriété fondamentale des antennes : le diagramme de rayonnement est identique à l'émission et à la réception pour tout élément rayonnant passif au comportement linéaire et réciproque.

### II.1) Le théorème de réciprocité des circuits

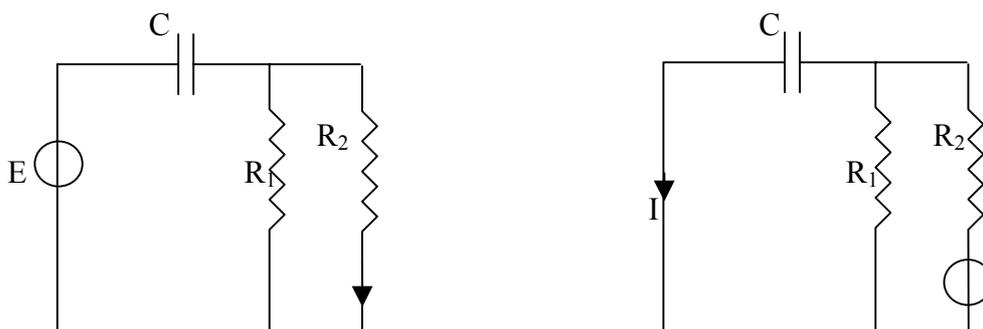
Soit un réseau passif linéaire comportant un nombre fini de branches et de nœuds.

On insère dans une branche  $b_1$  du réseau une f.e.m.  $E$ , et on mesure un courant  $I$  dans une autre branche quelconque  $b_2$ .

Le théorème de réciprocité montre que si on insère cette f.e.m.  $E$  dans la branche  $b_2$ , alors on aura un courant égal à  $I$  dans la branche  $b_1$ .

Illustration sur un exemple :

Dans chacun des circuits ci dessous dans lesquels on a échangé les branches contenant la f.e.m.  $E$  et le courant calculé  $I$ , on obtient la même expression de  $I$  :



E

I

Figure IV-1 : *Circuit RC*

Figure IV-2 : *Réciprocité dans le circuit RC*

$$I = E \frac{jR_1 C \omega}{R_1 + R_2 (1 + jR_1 C \omega)} \quad (IV-20)$$

Une forme plus générale de ce théorème est obtenue si on considère deux f.e.m. différentes  $E_1$  et  $E_2$  dans chacun des circuits précédents. On obtient alors :

$$I_1 = E_1 \frac{jR_1 C \omega}{R_1 + R_2 (1 + jR_1 C \omega)} \quad \text{et} \quad I_2 = E_2 \frac{jR_1 C \omega}{R_1 + R_2 (1 + jR_1 C \omega)} \quad (IV-21)$$

D'où l'écriture générale du théorème de réciprocité des circuits :

$$\frac{E_1}{I_1} = \frac{E_2}{I_2} \quad \text{soit encore :} \quad E_1 I_2 = E_2 I_1 \quad (IV-22)$$

On peut déduire de cette relation, que la matrice impédance de tout quadripôle passif, définie par la relation :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (IV-23)$$

est telle que :  $Z_{12} = Z_{21}$

## II.2) Le théorème de réciprocité de LORENTZ

Il s'agit de la généralisation du théorème précédent aux champs électromagnétiques.

Considérons deux densités surfaciques de courants  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$  qui sont à l'origine des champs électromagnétiques  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  et  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$ . On suppose que ces sources rayonnent dans un milieu linéaire, isotrope et homogène, caractérisé par une permittivité électrique  $\epsilon$  et une perméabilité magnétique  $\mu$ .

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = -j\omega\mu\vec{H}_1 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_1 = j\omega\epsilon\vec{E}_1 + \vec{J}_1 \quad (IV-24)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_2 = -j\omega\mu\vec{H}_2 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_2 = j\omega\epsilon\vec{E}_2 + \vec{J}_2 \quad (IV-25)$$

En développant les relations vectorielles ci-dessous, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) = \vec{H}_2 \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1) - \vec{E}_1 \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_2) - \vec{H}_1 \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_2) + \vec{E}_2 \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_1) \quad (IV-26)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) = \vec{H}_2 \cdot (-j\omega\mu\vec{H}_1) - \vec{E}_1 \cdot (j\omega\epsilon\vec{E}_2 + \vec{J}_2) - \vec{H}_1 \cdot (-j\omega\mu\vec{H}_2) + \vec{E}_2 \cdot (j\omega\epsilon\vec{E}_1 + \vec{J}_1) \quad (IV-27)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) = \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 \quad (\text{IV-28})$$

En intégrant cette dernière relation, sur un volume V, entouré par une surface fermée S :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) dV = \iiint_V (\vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2) dV = \oiint_S (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) \cdot \vec{n} ds \quad (\text{IV-29})$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale extérieure à l'élément de surface ds.

On peut montrer assez simplement que l'intégrale de surface présente dans (IV-29) est nulle dans de nombreux cas :

- Lorsque la surface S est parfaitement conductrice :

$$\vec{n} \wedge \vec{E}_1 = \vec{n} \wedge \vec{E}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{IV-30})$$

- Lorsque la surface S est caractérisée par une impédance de surface Z :

$$\vec{E} = -Z(\vec{n} \wedge \vec{H}) \quad \text{soit encore} \quad \vec{n} \wedge \vec{E} = -Z\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) \quad (\text{IV-31})$$

Le produit mixte étant invariant par permutation circulaire, on a les égalités suivantes :

$$(\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \wedge \vec{E}_1) \cdot \vec{H}_2 = (\vec{H}_2 \wedge \vec{n}) \cdot \vec{E}_1 \quad (\text{IV-32})$$

D'où le développement du terme qui intervient dans l'intégrale de surface :

$$(\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2) \cdot \vec{n} - (\vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \wedge \vec{E}_1) \cdot \vec{H}_2 - (\vec{n} \wedge \vec{E}_2) \cdot \vec{H}_1 \quad (\text{IV-33})$$

$$(\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2) \cdot \vec{n} - (\vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) \cdot \vec{n} = -Z[\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}_1)] \cdot \vec{H}_2 + Z[\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}_2)] \cdot \vec{H}_1 \quad (\text{IV-34})$$

$$(\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2) \cdot \vec{n} - (\vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) \cdot \vec{n} = -Z(\vec{n} \wedge \vec{H}_2) \cdot (\vec{n} \wedge \vec{H}_1) + Z(\vec{n} \wedge \vec{H}_1) \cdot (\vec{n} \wedge \vec{H}_2) = 0 \quad (\text{IV-35})$$

- Lorsque la surface S est une sphère située à une distance très grande des sources de rayonnement : ce sera l'hypothèse générale faite dans l'étude des antennes.

L'onde plane vérifie la relation :

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} (\vec{U} \wedge \vec{E}) \quad (\text{IV-36})$$

et à l'infini, la normale à la sphère est confondue avec la direction de propagation :

$$(\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2) \cdot \vec{n} - (\vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \wedge \vec{E}_1) \cdot \vec{H}_2 - (\vec{n} \wedge \vec{E}_2) \cdot \vec{H}_1 \quad (\text{IV-37})$$

$$(\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2) \cdot \vec{n} - (\vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) \cdot \vec{n} = \frac{1}{\eta} (\vec{U} \wedge \vec{E}_1) \cdot (\vec{U} \wedge \vec{E}_2) - \frac{1}{\eta} (\vec{U} \wedge \vec{E}_2) \cdot (\vec{U} \wedge \vec{E}_1) = 0 \quad (\text{IV-38})$$

Dans les situations décrites, l'intégrale de surface est nulle, ce qui conduit à l'expression suivante du théorème de réciprocité, analogie parfaite de celui qui a été présenté pour les circuits électriques :

$$\vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 \quad (\text{IV-39})$$

Comme pour les circuits, on peut en déduire que pour tout système passif au comportement linéaire et réciproque, les paramètres  $S_{ij}$  et  $S_{ji}$  de la matrice  $S$  de ce système sont égaux.

Cette propriété se vérifie expérimentalement de manière simple, puisqu'il suffit de faire afficher simultanément sur un analyseur de réseau les paramètres  $S_{12}$  et  $S_{21}$  pour constater qu'ils sont identiques.

Dans le cas des antennes, on considèrera le système de transmission dans son ensemble comme un quadripôle (Figure IV-3) dont on vérifiera expérimentalement sans difficulté l'égalité des paramètres  $S$ , que l'énergie soit injectée à l'une ou l'autre des antennes.

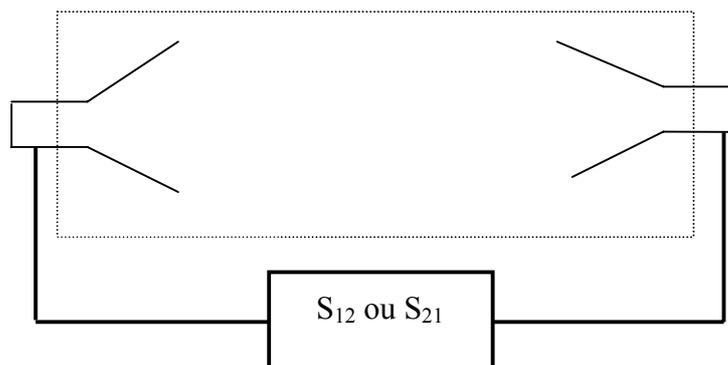


Figure IV-3 : Application du théorème de réciprocité à un phénomène émission – réception.

Il s'ensuit que le diagramme de rayonnement d'une antenne, qui est directement proportionnel au paramètre  $S_{12}$  ou  $S_{21}$  du système émission-réception en fonction de la direction de rayonnement  $(\theta, \varphi)$  est rigoureusement identique, que l'antenne soit utilisée en émission ou en réception.

### III) Le théorème d'équivalence

Il s'agit d'un théorème dont la démonstration rigoureuse est récente, puisqu'elle fait appel à la théorie des distributions. L'intuition physique est, elle, beaucoup plus ancienne, car les physiciens qui ont pressenti ce théorème sont HUYGENS (vers 1678) et FRESNEL (vers 1818). Leur approche étant très largement heuristique, ce théorème porte souvent l'appellation de principe de HUYGENS-FRESNEL.

#### III-1) La contribution de HUYGENS

Considérons un écran, percé d'une pupille de forme quelconque, sur lequel tombe une onde lumineuse (Figure IV-4), et un point d'observation P derrière l'écran :

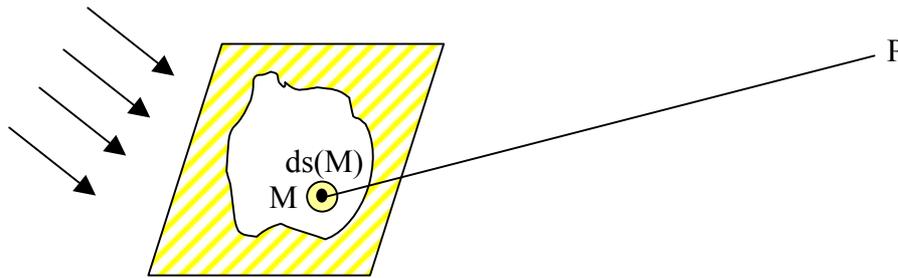


Figure IV-4 : Onde électromagnétique traversant une ouverture dans un écran pour atteindre un point d'observation

Les certitudes dont dispose HUYGENS sont simplement une propagation rectiligne de la lumière. Mais une telle certitude est mise en défaut derrière l'écran percé d'une pupille, car la zone de lumière n'est pas concentré dans un tube ayant la forme de la pupille : il y a certes une zone plus fortement éclairée en face du trou, mais pas de frontière franche entre la zone de pénombre et la zone éclairée.

Pour expliquer qu'une partie de la lumière s'écarte de sa trajectoire rectiligne, il émet l'hypothèse que chaque élément de surface  $ds(M)$  atteint par l'onde incidente se comporte comme une source secondaire qui rayonne une onde sphérique dans tout le demi-espace situé en aval de la pupille. Ces sources secondaires émettent en phase un champ électrique dont le module est intuitivement proportionnel à la surface  $ds(M)$  et à l'amplitude incidente  $E_i(M)$  au point  $M$  ce qu'on peut traduire par la relation :

$$dE(P,M)=CE_i(M)\frac{e^{jk(\overline{MP})}}{MP}ds(M) \quad (IV-40)$$

$C$  est une constante de proportionnalité choisie ad hoc, et qui a ici pour dimension l'inverse d'une longueur ( $m^{-1}$ ).

### III-2) La contribution de FRESNEL

S'appuyant sur les idées de HUYGENS, FRESNEL pense que le champ derrière l'écran peut être calculé en sommant toutes les contributions des sources secondaires présentes dans l'ouverture. Il apporte une contribution fondamentale en précisant que ces contributions doivent prendre en compte l'état de phase de ces sources secondaires, ce qui apparaît aujourd'hui évident si on se place, par exemple, dans le cas d'une onde incidente oblique par rapport à l'écran.

Il en déduit que le champ présent en un point  $P$  quelconque derrière l'écran peut s'écrire comme la somme des contributions de chacune des sources infinitésimales appartenant à l'ouverture :

$$\underline{E}(P)=\iint_S d\underline{E}(PM)=C\iint E_i(M)\frac{e^{jk(\overline{MP})}}{MP}ds(M) \quad (IV-41)$$

La propagation des ondes sous la forme de fronts d'onde sphériques est alors imaginée, et représentée par FRESNEL, de la manière suivant : (figure IV-5)

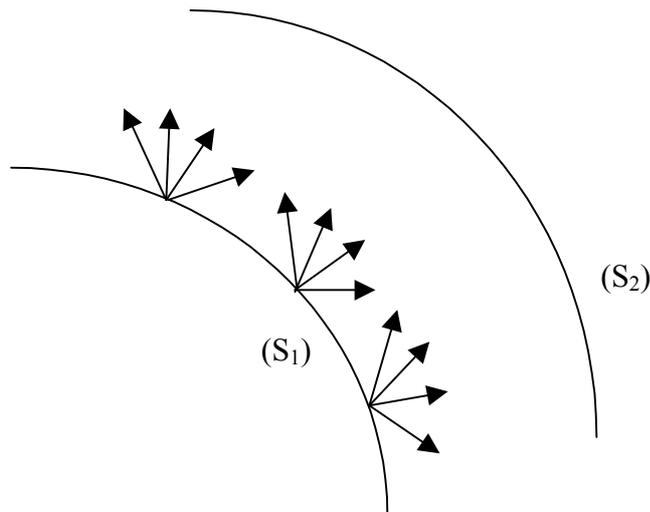


Figure IV-5 : Propagation d'un front d'onde à partir du rayonnement des sources secondaires.

Chaque point de la surface (S<sub>1</sub>) est considérée comme une source de rayonnement secondaire qui contribue à construire le front d'onde (S<sub>2</sub>).

### III-3) Le théorème d'équivalence

Il s'agit de la mise en forme rigoureuse des hypothèses faites par HUYGENS et FRESNEL. On peut l'énoncer de la manière suivante :

Soit un champ électromagnétique ( $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ ) créé par un ensemble de sources borné dans l'espace (Figure IV-6)



Figure IV-6 : Représentation des sources de rayonnement et du point d'observation

Introduisons une surface fermée fictive  $\Sigma$ , de forme arbitraire, qui sépare l'espace en un volume extérieur aux sources  $D_e$  où existe le champ électromagnétique ( $\vec{E}=\vec{E}_0, \vec{H}=\vec{H}_0$ ) et un domaine intérieur  $D_i$  qui contient les sources, et où le champ électromagnétique est imposé nul. (Figure IV-7)

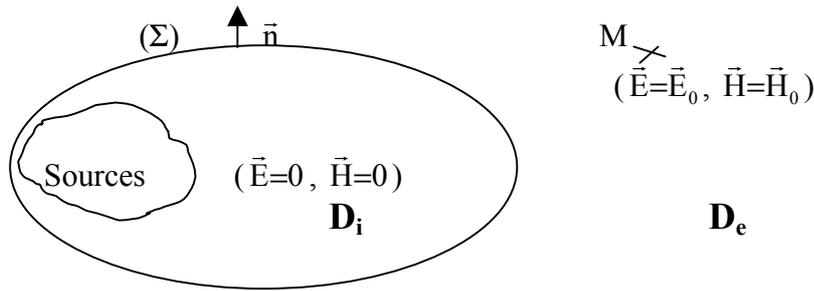


Figure IV-7 : Représentation des domaines intérieurs et extérieurs.

Désignons par  $U(M)$  la fonction caractéristique de la région extérieure aux sources :

$$\begin{aligned} U(M) &= 1 & \forall M \in D_e \\ U(M) &= 0 & \forall M \in D_i \end{aligned} \quad (IV-42)$$

On peut alors globaliser l'écriture du champ électromagnétique dans tout l'espace, à la fois dans le domaine intérieur, et dans la région extérieure, sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = U(M)\vec{E}_0(M,t) \quad \vec{H}(M,t) = U(M)\vec{H}_0(M,t) \quad (IV-43)$$

Sachant que  $(\vec{E}_0, \vec{H}_0)$  vérifie partout en dehors des sources les équations de MAXWELL :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_0}{\partial t} \quad (IV-44)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} \quad (IV-45)$$

On peut évaluer  $(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$  et  $(\vec{\nabla} \wedge \vec{H})$ , mais on doit le faire au sens des distributions, car il faut dériver un échelon de l'amplitude du champ dans l'espace lors de la traversée de la surface fermée fictive  $\Sigma$ , soit donc en utilisant les relations (IV-43) définissant les champs  $\vec{E}(M,t)$  et  $\vec{H}(M,t)$  :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M) = U(M) \left\{ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0(M) \right\} + \vec{n} \wedge (\Delta \vec{E} \cdot \delta \Sigma) \quad (IV-46)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}(M) = U(M) \left\{ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_0(M) \right\} + \vec{n} \wedge (\Delta \vec{H} \cdot \delta \Sigma) \quad (IV-47)$$

où les grandeurs qui interviennent dans ces expressions sont :

- $\vec{n}$  : normale extérieure à la surface de séparation  $\Sigma$ .
- $\Delta \vec{E}$  et  $\Delta \vec{H}$  : sauts respectifs des fonctions vectorielles  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{H}(M)$  en tout point  $M$  de la surface de séparation  $\Sigma$ .
- $\delta(\Sigma)$  : distribution associée à tout point  $M$  de la surface  $\Sigma$ .

En injectant (IV-44) et (IV-45) dans les accolades de (IV-46) et (IV-47), et en remarquant que :

$$\Delta \vec{E} \cdot \delta \Sigma = \vec{E}_0(M) \cdot \delta \Sigma \quad \text{et} \quad \Delta \vec{H} \cdot \delta \Sigma = \vec{H}_0(M) \cdot \delta \Sigma \quad (\text{IV-48})$$

car le champ électromagnétique qui est nul dans le domaine intérieur prend la valeur ( $\vec{E} = \vec{E}_0$ ,  $\vec{H} = \vec{H}_0$ ) à la frontière côté extérieur, on obtient les relations fondamentales suivantes :

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{E}(M) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}(M)) + \vec{n} \Lambda \vec{E}_0(M) \cdot \delta \Sigma \quad (\text{IV-49})$$

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{H}(M) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}(M)) + \vec{n} \Lambda \vec{H}_0(M) \cdot \delta \Sigma \quad (\text{IV-50})$$

Ainsi, tout se passe comme si les champs électromagnétiques ( $\vec{E}(M), \vec{H}(M)$ ) appartenant au domaine extérieur  $D_e$  étaient engendrés par des courants électriques et magnétiques équivalents :

$$\vec{J}_e = \vec{n} \Lambda \vec{H}_0(M) \cdot \delta \Sigma \quad (\text{IV-51})$$

$$\vec{J}_m = -\vec{n} \Lambda \vec{E}_0(M) \cdot \delta \Sigma \quad (\text{IV-52})$$

La seule connaissance des champs électromagnétiques à la frontière de séparation entre les domaines intérieur et extérieur permet donc d'évaluer le champ en tout point de l'espace extérieur aux sources. Il suffit pour cela de faire rayonner les sources équivalentes évaluées sur la surface de séparation par les relations (IV-51) et (IV-52), en utilisant l'expression classique établie précédemment, et généralisée aux courants magnétiques :

$$\vec{E}(P) = \frac{j k}{4\pi} \psi(R) \iiint_V \left[ \eta (\vec{J}_e(M) \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U} - (\vec{J}_m(M) \wedge \vec{U}) \right] e^{j k \cdot \vec{OM}} dV \quad (\text{IV-53})$$

$$\vec{H}(P) = \frac{j k}{4\pi} \psi(R) \iiint_V \left[ \frac{1}{\eta} (\vec{J}_m(M) \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U} + (\vec{J}_e(M) \wedge \vec{U}) \right] e^{j k \cdot \vec{OM}} dV \quad (\text{IV-54})$$

où P désigne le point d'observation où est calculé le champ électromagnétique, M le point courant de la surface où sont évalués les courants équivalents et  $\eta$  l'impédance d'onde.

Cette démonstration permet de conclure à la validité du principe formulé successivement par HUYGENS puis FRESNEL selon lequel le champ en un point quelconque de l'espace peut être déduit de sources équivalentes qui entourent les sources de rayonnement.

Il faut enfin noter que les courants magnétiques n'ont pas d'existence physique, mais ils se révèlent un intermédiaire de calcul particulièrement intéressant dans la démonstration et l'application du théorème d'équivalence.

#### III-4 Quelques applications du théorème d'équivalence

Pour que le théorème d'équivalence soit applicable en toute rigueur, il faut que la surface qui entoure les sources, souvent appelée surface de HUYGENS soit fermée et donc

délimite un volume. Son application à des surfaces ouvertes peut conduire, notamment sur le plan numérique, à des erreurs importantes.

On distingue deux applications essentielles de ce théorème :

#### Des applications analytiques

Pour de nombreuses antennes, il est possible d'avoir une expression analytiques des champs électromagnétiques au voisinage proche de l'antenne : antennes imprimées, fentes rayonnantes, guides ouverts, cornets, paraboles .....(Figure IV-8).

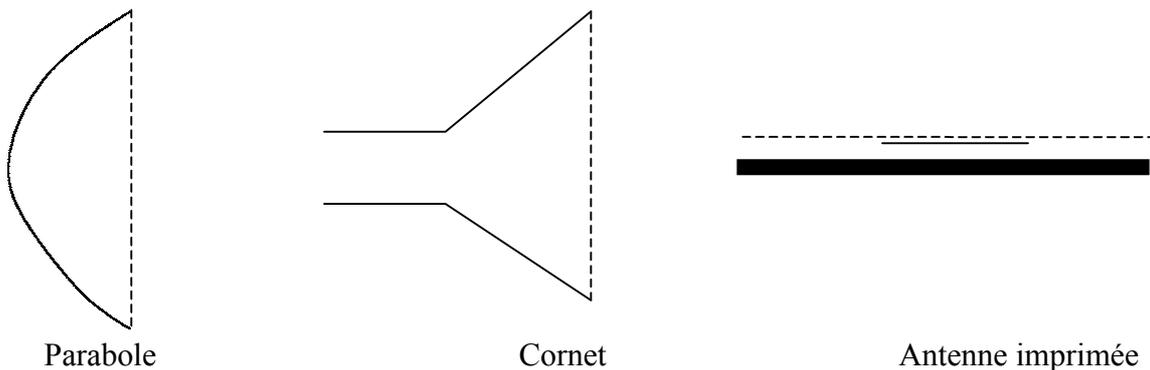


Figure IV-8 : Exemples de surfaces de HUYGENS

On utilise alors (imparfaitement) le théorème de HUYGENS pour déterminer le champ lointain rayonné par ces antennes, à partir de la connaissance des champs sur la surface en pointillé.

Il est clair que cette méthode de calcul est approximative car on ne ferme pas la surface de HUYGENS, et on ne prend pas en compte des champs proche de l'ouverture qui ont quelquefois une amplitude significative.

Mais il s'agit pratiquement du seul moyen d'obtenir une expression analytique du champ lointain. La comparaison avec l'expérimentation montre une bonne description des champs dans l'axe de la surface, mais des résultats plus approximatifs lorsqu'on se rapproche d'une direction tangentielle à cette surface. Ces expressions analytiques sont toutefois importantes car elles mettent en évidence les paramètres significatifs qui influent sur le rayonnement de ces antennes.

#### Des applications numériques

Pour la plupart des problèmes physique, les équations de MAXWELL n'ont pas de solutions analytiques. On est alors obligé de mettre en œuvre des méthodes numériques de résolutions.

Parmi les plus répandues, on trouve dans le domaine temporelle, la méthode des différences finies. On procède à une discrétisation de l'espace et du temps, et on calcule de proche en proche, l'évolution du champ électromagnétique en chaque point de l'espace, en utilisant une dérivation numérique. Une telle méthode nécessite une discrétisation du temps et de l'espace suffisamment fine (disons inférieur à  $\lambda/10$  pour fixer les idées), et conduit donc à un volume de maillage et de calcul forcément limité (disons  $10 \lambda$  pour fixer les idées). Ce volume ne permet pas une détermination correcte du champ lointain émis par un dispositif rayonnant.

On procède alors de la manière suivante : On calcul numériquement les champs sur un volume parallélépipédique qui entoure les sources de rayonnement, souvent appelé « boîte de HUYGENS », puis on applique le théorème d'équivalence afin de déterminer le champ lointain rayonné par les sources. Les résultats numériques se montrent en parfaite concordance avec les relevés expérimentaux. La figure IV-9 illustre un exemple de « boîte de HUYGENS » permettant le calcul du diagramme de rayonnement d'une antenne imprimée.

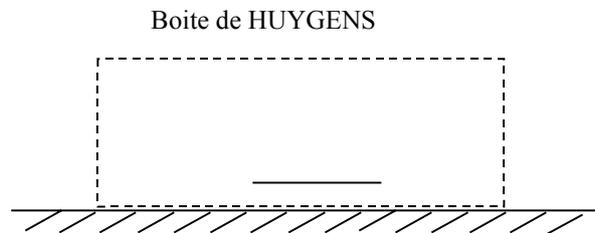


Figure IV-9 : Exemple de boîte de HUYGENS

On procède de manière analogue dans d'autres méthodes numériques où le volume de calcul est nécessairement limité, par exemple avec la méthode des éléments finis, qui est le pendant des différences finies, mais dans le domaine fréquentiel.

#### **IV) Le théorème des images**

Il s'agit d'un théorème qui permet une simplification importante des calculs de champ électromagnétique, dans l'hypothèse où les charges et courants agissent en présence d'un plan infini parfaitement conducteur.

##### IV-1) Le théorème des images en électrostatique

Le potentiel du à une charge ponctuelle  $q$  statique en espace libre s'exprime simplement en tout point de l'espace, à une distance  $r$  de cette charge, par la relation :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{IV-55})$$

Le problème devient nettement plus complexe si on s'interroge sur le potentiel en tout point de l'espace, du à une charge ponctuelle  $q$ , en présence d'un plan infini parfaitement conducteur porté au potentiel 0.

L'approche la plus simple consiste à construire un problème rigoureusement équivalent, mais où les charges sont situées en espace libre, c'est à dire dans une situation où on sait, sans aucune difficulté, déterminer le potentiel en tout point de l'espace.

Ce problème rigoureusement équivalent est établi en enlevant le plan parfaitement conducteur au potentiel 0, et en introduisant une charge opposée  $-q$ , symétrique de la charge  $q$  par rapport au plan de masse (Figure IV-10 )

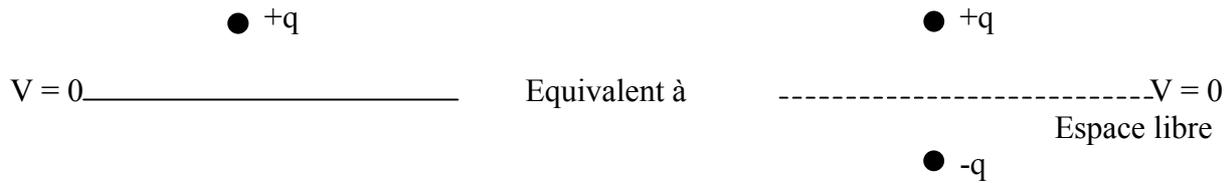


Figure IV-10 : *Théorème des images en électrostatique*

La solution à l'équation de LAPLACE étant unique dès l'instant où les conditions aux limites sont fixées, la solution aux deux situations présentées est identique dans le demi-espace supérieur, car les charges y sont identiques et les conditions aux limites sur le plan de séparation sont identiques.

Les charges  $+q$  et  $-q$  étant situées en espace libre, la détermination du potentiel en un point quelconque de l'espace ne pose plus aucune difficulté.

#### IV-2) Le Théorème des images en optique géométrique

De nombreuses propriétés des champs électromagnétiques ont été pressenties en examinant des phénomènes optiques. L'optique géométrique étant une solution asymptotique des équations de MAXWELL vers les hautes fréquences, ses propriétés sont du plus haut intérêt.

Si on considère une source de rayonnement située au point M, elle donne lieu à une réflexion totale sur un plan parfaitement conducteur, réflexion qui obéit à la loi de DESCARTES (Figure IV-11 )

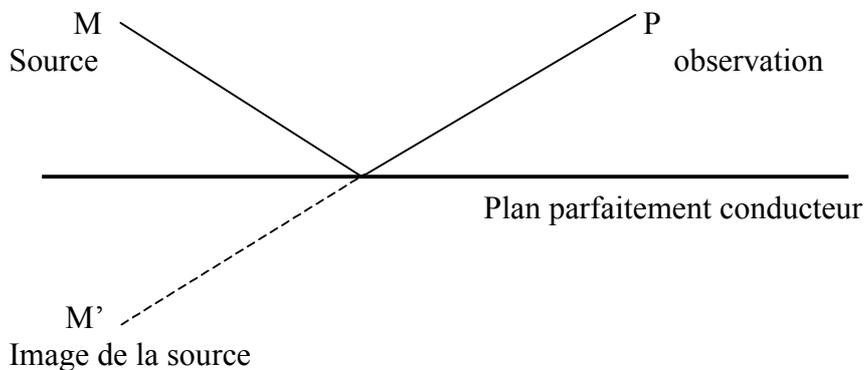


Figure IV-11 : *Représentation de la source et de son image*

Tout se passe comme si le rayon réfléchi qui parvient au point d'observation P était issu de l'image de la source M'.

D'un point de vue électromagnétique, les conditions aux limites sur le plan parfaitement conducteur imposent une propriété supplémentaire.

La composante tangentielle du champ électrique se réfléchit en changeant de signe, puisque le champ électrique tangentiel total est nul, tandis que la composante normale se réfléchit dans changer de signe, ce qui conduit à un champ électrique total normal égal à deux fois le champ électrique normal incident.

La conséquence immédiate de cette propriété est la suivante : l'image d'un élément de courant parallèle au plan conducteur sera un élément de courant situé au point image, mais

orienté dans un sens opposé, tandis que l'image d'un élément de courant normal au plan de masse sera situé au point image, mais avec un sens identique à la source.

#### IV-3) Le théorème des images pour le champ électromagnétique rayonné par des courants.

Les propriétés des images que nous avons mis en évidence pour l'optique géométrique sont valides en champ lointain.

Elles se généralisent aux équations de MAXWELL, et on se propose de montrer qu'elles sont valides également en champ proche.

Nous avons établi, dans un chapitre précédent, la relation qui exprime le champ rayonné en espace libre par une distribution quelconque de courant  $\vec{J}$ .

Nous nous intéressons désormais au même problème, mais en présence d'un plan de masse parfaitement conducteur, sur lequel nous connaissons les conditions aux limites pour le champ rayonné : champ électrique tangentiel nul et champ magnétique normal nul.

Le théorème des images consiste à trouver une distribution de courant image  $\vec{J}^*$  telle que le rayonnement des courants :  $\vec{J} + \vec{J}^*$  donne les mêmes conditions aux limites sur le plan fictif où se situait le plan de masse.

Si ces conditions sont identiques, la solution aux équations de MAXWELL étant unique dès l'instant où on précise les sources et les conditions aux limites, on doit retrouver un champ électromagnétique identique dans le demi-espace supérieur.

Considérons un repère  $(O, x, y, z)$  dans lequel le plan parfaitement conducteur sera choisi comme étant le plan  $z = 0$ .

Considérons un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, h)$  où se trouve localisé un élément de courant  $\vec{J}$ , et le point image  $M^*$  de coordonnées  $(x, y, -h)$  où se trouve localisé le courant image  $\vec{J}^*$ .

Considérons pour finir, un point d'observation  $P$ , situé sur le plan parfaitement conducteur  $z = 0$ , et de coordonnées  $(X, Y, 0)$  (Figure IV-12) :

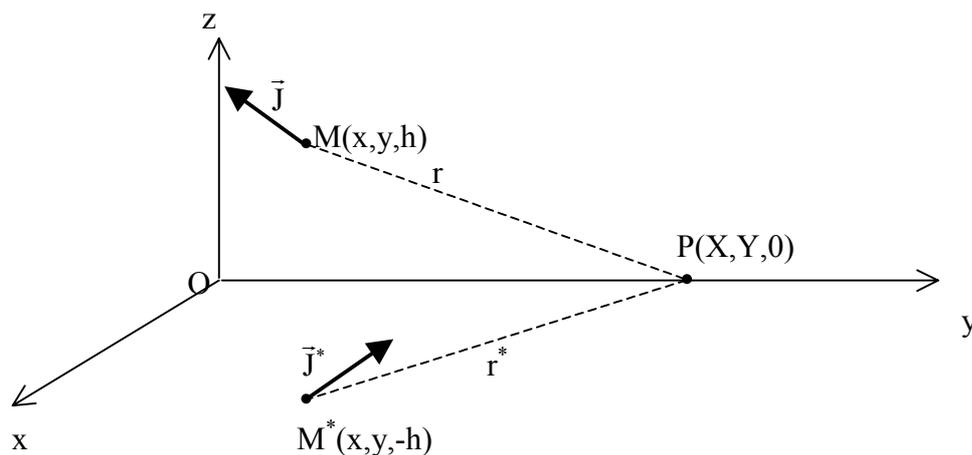


Figure IV-12 : Représentation d'un élément de courant et de son image.

Le champ électrique rayonné par un élément de courant  $\vec{J}$  localisé au point  $M$  a été obtenu dans un chapitre précédent ( $r$  représente la distance  $MP$ , et  $\vec{U}$  un vecteur unitaire dans la direction  $MP$ ) :

$$\vec{E}(P) = \frac{k^2}{4\pi j \omega \epsilon_0} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \vec{J}(M) - \left( 1 + \frac{3}{jkr} - \frac{3}{k^2 r^2} \right) (\vec{J}(M) \cdot \vec{U}) \vec{U} \right\} \cdot \psi(r) \quad (IV-56)$$

Le champ électrique image rayonné par un élément de courant image  $\vec{J}^*$  localisé au point  $M^*$  sera donc :

$$\vec{E}^*(P) = \frac{k^2}{4\pi j \omega \epsilon_0} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{jkr^*} - \frac{1}{k^2 r^{*2}} \right) \vec{J}^*(M^*) - \left( 1 + \frac{3}{jkr^*} - \frac{3}{k^2 r^{*2}} \right) (\vec{J}^*(M^*) \cdot \vec{U}^*) \vec{U}^* \right\} \cdot \psi(r^*) \quad (IV-57)$$

On notera que pour des raisons de symétrie,  $r = r^*$  et :

$$\vec{U} = U_x \vec{e}_x + U_y \vec{e}_y + U_z \vec{e}_z \text{ impose : } \vec{U}^* = U_x \vec{e}_x + U_y \vec{e}_y - U_z \vec{e}_z \quad (IV-58)$$

Conformément aux propriétés mises en évidence grâce à l'optique géométrique, l'image du courant source :

$$\vec{J}(M) = J_x \vec{e}_x + J_y \vec{e}_y + J_z \vec{e}_z \quad (IV-59)$$

sera la suivante :

$$\vec{J}^*(M^*) = -J_x \vec{e}_x - J_y \vec{e}_y + J_z \vec{e}_z \quad (IV-60)$$

Le champ total généré au niveau du plan de masse par ces deux distributions de courant en espace libre sera donné par la relation :

$$\vec{E}(P)_{\text{total}} = \vec{E}(P) + \vec{E}^*(P) \quad (IV-61)$$

Et on peut vérifier, à l'aide des relations précédentes, que le champ électrique total n'a pas de composante tangentielle au plan de masse (pas de composante suivant x et y), tandis que la composante suivant z est égale à deux fois la composante du champ incident suivant cette direction. La propriété duale est vérifiée par le champ magnétique.

#### IV-4) Applications du théorème des images

De nombreuses antennes sont conçues pour fonctionner au dessus d'un plan de masse parfaitement conducteur : antennes filaires, antennes imprimées ....

En pratique, les plans de masse ne sont jamais infinis. Le théorème des images permet cependant d'avoir une bonne idée de l'influence de ce plan, dès l'instant où ses dimensions sont supérieures à quelques longueurs d'ondes, les effets de bords pouvant être traités par d'autres méthodes, comme la théorie géométrique de la diffraction.

On utilise également très souvent ce théorème, pour étudier la propagation des ondes au dessus du sol terrestre. Il s'agit d'un premier modèle de sol, assez rudimentaire, mais qui met en évidence les phénomènes fondamentaux de son influence. Les modèles sont ensuite affinés en prenant en compte les propriétés électromagnétiques du sol, sous la forme d'impédance de surface ou de diélectrique complexe.

## V) Le théorème de BABINET

Comme de nombreux théorèmes de l'électromagnétisme, le théorème de BABINET traduit un phénomène physique qui a d'abord été mis en évidence dans le domaine de l'optique, avant d'être généralisé par BOOKER, de manière rigoureuse, aux ondes électromagnétiques.

### V-1) Le théorème de BABINET en optique.

Dans sa forme la plus simple, déduite de l'optique géométrique, le principe de BABINET indique que si on interpose entre une source et un plan d'observation un écran plan (Situation 1) puis un écran plan complémentaire du premier (Situation 2), la somme des champs observés dans les situations 1 et 2 est égale au champ obtenu dans le plan d'observation en l'absence d'écran. Cette conclusion est évidente en optique géométrique.

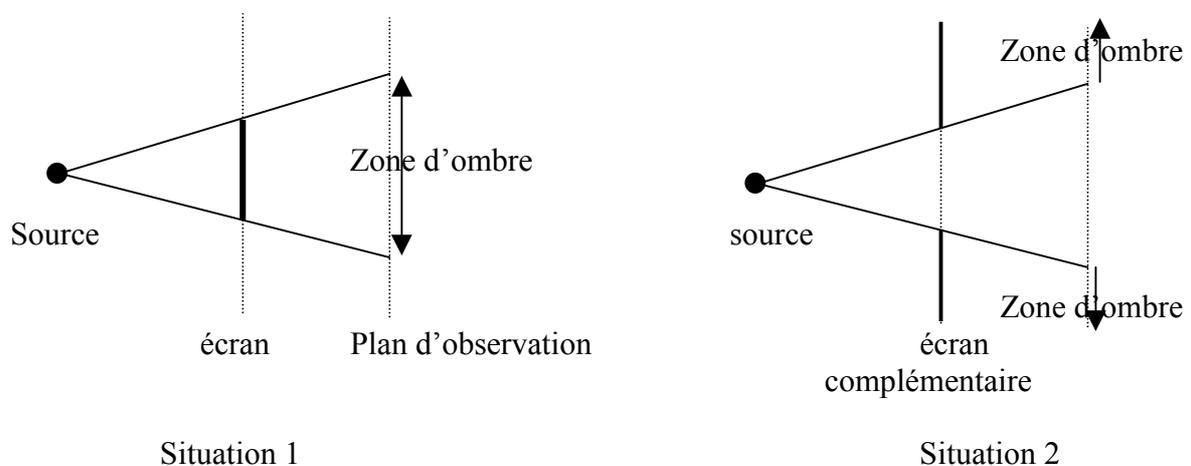


Figure IV-13 : *Théorème de BABINET en optique géométrique.*

De plus, si l'on considère un écran et une fente de petites dimensions ( quelques dizaines de microns pour fixer les idées), on constate que la figure de diffraction est identique dans les situations 1 et 2, sauf dans la zone illuminée. En pratiquant l'expérience avec un faisceau LASER, un fil et une fente de même dimension, on obtient donc exactement la même figure de diffraction, à l'exception d'un point brillant au centre de la figure, dans le cas de la fente.

La généralisation rigoureuse de ces observations à l'électromagnétisme de MAXWELL est moins évidente qu'il n'apparaît de prime abord. En particulier, l'écran complémentaire doit être complémentaire non seulement dans sa forme, mais également dans ses propriétés électromagnétiques : à un écran électrique parfait, on doit associer un écran complémentaire magnétique parfait et réciproquement.

Mais on sait qu'il n'existe pas, physiquement, d'écran magnétique parfait, ce qui enlève beaucoup d'intérêt à l'équivalence déduite du théorème de BABINET dans ces conditions.

On peut cependant utiliser le fait qu'une ouverture dans écran magnétique parfait, illuminée par une onde en polarisation magnétique diffracte de la même manière que la même ouverture dans un écran électrique parfait, illuminée par une onde en polarisation électrique ( On a simplement échangé le rôle des champs électrique et magnétique dans ce problème de diffraction).

On peut alors définir une équivalence applicable à deux écrans parfaitement conducteurs, complémentaires seulement dans leur forme.

V-2) Le théorème de BABINET en électromagnétisme, pour des écrans parfaitement conducteurs.

La généralisation du théorème de BABINET à l'électromagnétisme des équations de MAXWELL fait appel à la notion de champ incident, de champ diffracté, et de champ total qu'il nous faut préalablement définir.

Considérons tout d'abord la figure IV-14 sur laquelle nous représentons simplement une source de champs électromagnétiques et un point d'observation P :



Figure IV-14 : Représentation d'une source et d'un point d'observation.

Le champ présent au point P en l'absence d'obstacle venant perturber le champ électromagnétique émis par la source est désigné par champ incident :  $(\vec{E}_i, \vec{H}_i)$ .

Considérons ensuite la figure IV-15 où nous avons représenté un obstacle de forme et de dimension quelconque qui vient perturber le champ électromagnétique émis par la source

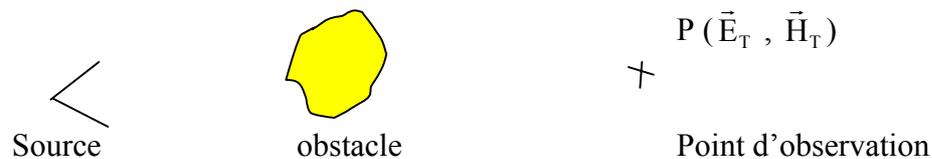


Figure IV-15 : Représentation d'un obstacle diffractant entre la source et le point d'observation.

Le champ présent au point d'observation P a été modifié par rapport à la situation précédente : il est désormais désigné par champ total :  $(\vec{E}_T, \vec{H}_T)$ .

On peut alors définir la champ diffracté par l'objet  $(\vec{E}_D, \vec{H}_D)$ , qui traduit la perturbation électromagnétique générée par la présence de cet objet. Ce champ diffracté est défini en tout point de l'espace par la relation :

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= \vec{E}_i + \vec{E}_D \\ \vec{H}_T &= \vec{H}_i + \vec{H}_D \end{aligned} \tag{IV-62}$$

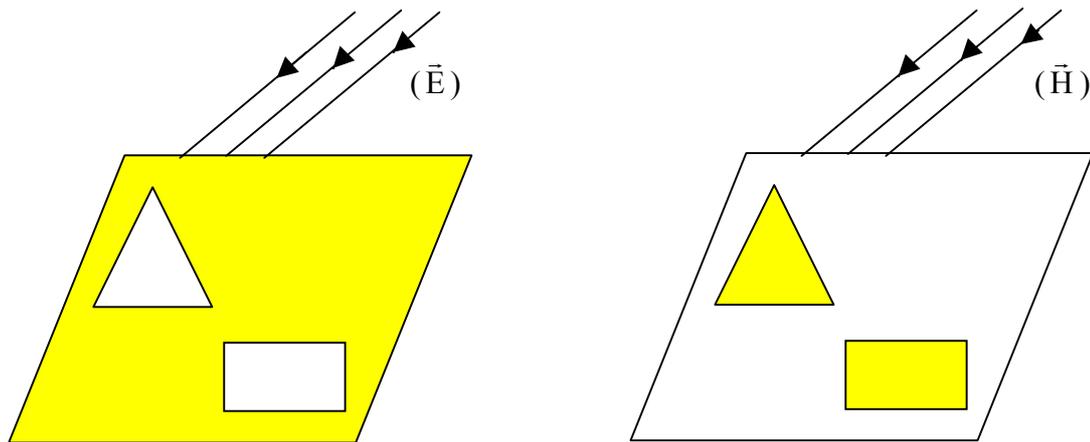
Il est important de noter que le champ diffracté tel qu'il est défini par les relations ci-dessus correspond à la terminologie américaine du « scattered field », et il est donc indicé par la lettre s dans les documents en langue anglaise. Il est différent, en général, du « diffracted field » qui représente le champ diffracté au sens de la théorie géométrique de la diffraction.

A partir des définitions précédentes, on peut énoncer de manière rigoureuse le théorème de BABINET appliqué à des écrans parfaitement conducteurs.

Soit une ouverture ( $\Sigma$ ) (représentée par un triangle et un rectangle dans la figure ci-dessous) dans un plan infini, parfaitement conducteur, et illuminé par une onde en polarisation électrique.

Soit un écran plan parfaitement conducteur, de forme ( $\Sigma$ ) illuminé en espace libre par une onde en polarisation magnétique.

Alors, dans le demi-espace ne contenant pas les sources, on a les relations suivantes entre les champs totaux et les champs diffractés: (Figure IV-16)



$$\begin{aligned} \text{Champ total } (\vec{E}_T) & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{Champ diffracté } (\vec{H}_D) \\ & \text{et} \\ \text{Champ diffracté } (\vec{E}_D) & \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{Champ total } (\vec{H}_T) \end{aligned}$$

Figure IV-16 : *Champ électromagnétique derrière un écran et son complémentaire*

V-3) Application aux antennes

Le théorème de BABINET est surtout utile pour montrer l'équivalence de rayonnement de structures en apparence assez différentes.

On peut montrer par exemple qu'il existe une relation simple entre le diagramme de rayonnement d'une ouverture dans un plan métallique, par exemple une fente dans un guide d'onde, et sa structure complémentaire, c'est à dire le rayonnement d'une structure parfaitement conductrice ayant les dimensions de la fente avec la même répartition des champs (Figure IV-17).

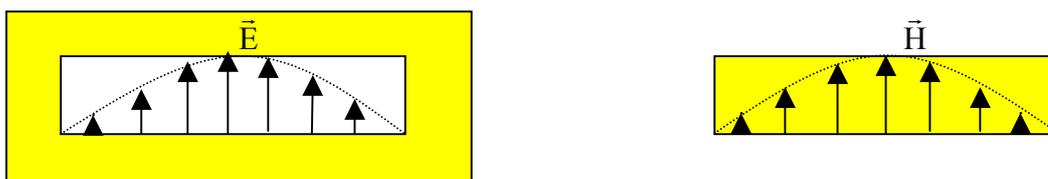


Figure IV-17 : *Equivalence de rayonnement entre une fente et son complémentaire.*

Le rayonnement dans le plan E de chaque structure est identique au rayonnement dans le plan H de l'autre structure : en d'autres termes, les modules des champs rayonnés sont égaux, seules les polarisations sont échangées.