

ENSAM PHYSIQUE 1 PSI 1998
Et ARCHIMEDE PSI 1998

PARTIE I

I.A Le champ électrique :

I.A.1 $\vec{E}'(M')$ est le symétrique de $\vec{E}(M)$ par rapport à P.

I.A.2 a) $\vec{E}(M)$ est son propre symétrique par rapport à Ps donc il est contenu dans le plan Ps.

b) $\vec{E}(M)$ est l'opposé de son propre symétrique par rapport à Pa donc il est normal au plan Pa.

c) Soit Ox la direction normale aux 2 plans chargés. Tout plan contenant M et orthogonal aux 2 plans chargés est plan de symétrie pour la distribution de charges, donc $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de tous ces plans, donc est normal aux 2 plans chargés. De plus, du fait de l'invariance par toute translation selon Oy ou Oz, $\vec{E}(M) = E(x) \vec{u}_x$. Enfin, d'après le théorème de Gauss appliqué à un parallélépipède rectangle entièrement placé entre les 2 plans chargés et ayant 2 surfaces de mesure S en $x=x_1$ et $x=x_2$, $E(x_1)S = E(x_2)S$. Ainsi, $\vec{E}(M)$ ne dépend pas non plus de x. Il est uniforme.

I.B Le champ magnétique :

I.B.1 $\vec{B}'(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à P.

I.B.2 a) $\vec{B}(M)$ est normal à Ps.

b) $\vec{B}(M)$ est dans le plan Pa.

c) Prenons $\Delta = Oz$, et utilisons le système de coordonnées cylindriques. Tout plan orthogonal à Oz est plan de symétrie pour la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est parallèle à Oz. De plus, du fait de la symétrie cylindrique,

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z.$$

D'autre part, en appliquant le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire extérieur au solénoïde, on obtient $B(r) = Cte$. En réitérant ceci avec un contour à l'intérieur du solénoïde, on montre de même que le champ y est uniforme.

S'il n'existe pas d'autre source de champ magnétique, le champ extérieur, qui est uniforme dans tout l'espace extérieur au solénoïde, est nul (cf Biot et Savart).

I.C Le champ électromagnétique :

I.C.1 a) A l'aide des symétries et des invariances, on obtient ici $\vec{E} = E(\rho) \vec{k}$. De plus, le champ est parallèle à Δ donc

finalement , $\vec{E} = E(\rho) \vec{k}$.

b) $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. D'un point de vue formel, le calcul de $\vec{B}(M)$ créé par le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est

similaire au calcul de $\vec{B}(M)$ créé par des courants de conduction. Or la distribution de courant de déplacement possède la symétrie cylindrique. Donc, comme pour le champ magnétique créé par un conducteur cylindrique circulaire infini,

$\vec{B}(M)$ est ici orthoradial et de la forme $\vec{B}(M, t) = B(\rho, t) \vec{u}_\theta$.

I.C.2 a) $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, donc $\vec{\text{rot}} \vec{j} = -\gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\gamma \frac{d\vec{B}}{dt}$. Les équations sont les mêmes qu'à la question précédente (champ à

divergence nulle dans les 2 cas), avec une même distribution de champ exciteur. $\vec{j}(M, t)$ est donc orthoradial :

$\vec{j}(M, t) = j(\rho, t) \vec{u}_\theta$. Ce sont les courants de Foucault (eddy-currents).

b) On applique le théorème de Stokes sur un cercle de rayon ρ et d'axe $z'z$: $2\pi\rho E(\rho, t) = -\pi\rho^2 \frac{dB}{dt}(t)$ d'où :

$E(\rho, t) = -\frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \rho$ et $\vec{E}(\rho, t) = -\frac{\rho}{2} \frac{dB}{dt}(t) \vec{u}_\rho$. On voit donc que la norme du champ électrique est proportionnelle à la

distance à l'axe. Le signe moins est conforme à la loi de Lenz : quand le champ magnétique augmente dans le sens des $z > 0$, le courant tourne dans le sens rétrograde, ce qui tend à diminuer le champ magnétique.

PARTIE II

II.A Calcul des champs B1 et E2 :

$$\text{II.A.1 a) } \vec{\text{rot}} \underline{\text{B}}_1 = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\text{E}}_0}{\partial t} = \frac{i\omega}{c^2} \underline{\text{E}}_0$$

b) cf I.C.1 b). De plus, $\vec{\text{rot}} \underline{\text{B}}_1 = \frac{-\omega}{c^2} e_0 \sin(\omega t) \vec{\text{k}}$ donc si $e_0 > 0$, $\underline{\text{B}}_1$ est selon $+\underline{\text{u}}_0$ quand $\sin(\omega t) < 0$.

c) Théorème de Stokes : $2\pi\rho \underline{\text{B}}_1 = \frac{i\omega}{c^2} \pi\rho^2 \underline{\text{E}}_0$ d'où $\underline{\text{B}}_1 = \frac{iX}{c} \underline{\text{E}}_0 \underline{\text{u}}_0$. Et ceci indépendamment de z.

X est sans dimension.

$$\text{II.A.2 a) } \vec{\text{rot}} \underline{\text{E}}_2 = -\frac{\partial \underline{\text{B}}_1}{\partial t} \text{ et donc } \vec{\text{rot}} \underline{\text{E}}_2 = \frac{\omega X}{c} \underline{\text{E}}_0 \underline{\text{u}}_0.$$

b) Les sources de $\underline{\text{E}}_2(\text{M})$, c'est-à-dire $-\frac{\partial \underline{\text{B}}_1}{\partial t}$ ont la symétrie cylindrique, donc $\underline{\text{E}}_2(\text{M})$ est axial (on néglige les effets de

bord). On peut être plus précis dans la justification en écrivant que $\vec{\text{rot}} \underline{\text{E}}_2$ est porté par $\underline{\text{u}}_0$ et que donc, en utilisant la

formule (17) de l'annexe, et compte tenu de la symétrie cylindrique, on a $\frac{\partial(\rho E_{2\theta})}{\partial \rho} = 0$, d'où $E_{2\theta} = \frac{Cte}{\rho}$. Comme le

champ ne doit pas diverger sur l'axe, la constante est nulle. De plus, en utilisant la formule (16) de l'annexe, et

$\text{div} \underline{\text{E}}_2 = 0$, on obtient de même $\frac{\partial(\rho E_{2\rho})}{\partial \rho} = 0$, ce qui prouve aussi que la composante radiale est en $1/\rho$, donc nulle

également.

c) Théorème de Stokes : $a[\underline{\text{E}}_2(\rho_1) - \underline{\text{E}}_2(\rho_2)] = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\omega^2}{2c^2} \underline{\text{E}}_0 a \rho d\rho = \frac{\omega^2}{4c^2} \underline{\text{E}}_0 a(\rho_2^2 - \rho_1^2)$, d'où : $\underline{\text{E}}_2 = -X^2 \underline{\text{E}}_0$. Le choix

$\underline{\text{E}}_2(0) = 0$ est tout-à-fait possible en considérant que la constante additive éventuelle est en réalité contenue dans $\underline{\text{E}}_0$.

II.B Comportement basse fréquence :

$$\text{II.B.1 } \underline{\text{B}}_{\text{BF}}(\text{M}, t) = \underline{\text{B}}_1 = \frac{iX}{c} \underline{\text{E}}_0 \underline{\text{u}}_0 \text{ et donc } \underline{\text{B}}_{\text{BF}}(\text{M}, t) = -\frac{X}{c} e_0 \sin(\omega t) \underline{\text{u}}_0$$

$$\underline{\text{E}}_{\text{BF}}(\text{M}, t) = (1 - X^2) \underline{\text{E}}_0 \vec{\text{k}} \text{ et donc } \underline{\text{E}}_{\text{BF}}(\text{M}, t) = (1 - X^2) e_0 \cos(\omega t) \vec{\text{k}}$$

$$\text{II.B.2 a) } \varepsilon_e(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} (1 - X^2)^2 e_0^2 \cos^2(\omega t) \text{ et } \varepsilon_m(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} X^2 e_0^2 \sin^2(\omega t)$$

$$\text{b) } \langle \varepsilon_e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} (1 - X^2)^2 e_0^2 \text{ et } \langle \varepsilon_m \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} X^2 e_0^2 \text{ d'où } \frac{\langle \varepsilon_m \rangle}{\langle \varepsilon_e \rangle} = \frac{X^2}{(1 - X^2)^2}.$$

Ainsi, en basse fréquence, l'énergie magnétique est négligeable devant l'énergie électrique dans le condensateur.

$$\text{II.B.3 a) } \vec{\text{P}} = \frac{\vec{\text{E}}_0 \wedge \vec{\text{B}}_1}{\mu_0} = \frac{X}{c\mu_0} e_0^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \underline{\text{u}}_\rho \text{ donc } \vec{\text{P}} = \frac{X\varepsilon_0 c}{2} e_0^2 \sin(2\omega t) \underline{\text{u}}_\rho$$

b) $\vec{\text{P}}$ est donc radial. Son flux n'est non nul qu'à travers la surface latérale du condensateur.

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\text{surf. lat.}} \vec{\text{P}} \cdot d\vec{\text{S}} = \pi R h X \varepsilon_0 c e_0^2 \sin(2\omega t) \text{ et } \langle \mathcal{P} \rangle = 0.$$

On pouvait s'attendre à ce résultat car le condensateur est supposé ici non dissipatif, donc il restitue entièrement l'énergie qu'il accumule. En basse fréquence, c'est un vrai condensateur.

II.C Comportement haute fréquence :

II.C.1 $\underline{\text{E}}_2$ étant axial et à symétrie cylindrique, le courant de déplacement correspondant l'est aussi ; par suite, $\underline{\text{B}}_3$ est orthoradial (cf I.C.1.b).

$$\text{Théorème de Stokes : } 2\pi\rho \underline{\text{B}}_3 = \frac{i\omega}{c^2} \int_0^\rho -\frac{\omega^2}{4c^2} \rho^2 2\pi\rho \underline{\text{E}}_0 d\rho \text{ d'où } \underline{\text{B}}_3 = -\frac{iX^3}{2c} \underline{\text{E}}_0 \underline{\text{u}}_\theta.$$

II.C.2 $\vec{\text{rot}} \vec{E}_4 = -\frac{\partial \vec{B}_3}{\partial t}$ et donc $\vec{\text{rot}} \vec{E}_4 = -\frac{\omega^4 \rho^3}{2^4 c^4} \vec{E}_0 \vec{u}_\theta$. De même que \vec{E}_2, \vec{E}_4 est axial.

Théorème de Stokes : $a[\vec{E}_4(\rho) - \vec{E}_4(0)] = \int_0^\rho \frac{\omega^4}{2^4 c^4} \vec{E}_0 a \rho^3 d\rho = \frac{\omega^4}{2^4 c^4} \vec{E}_0 \frac{a \rho^4}{4}$, d'où : $\vec{E}_4 = \frac{X^4}{4} \vec{E}_0$ en prenant, ici encore $\vec{E}_4(0) = 0$

II.C.3 a) De même que plus haut : $2\pi\rho \vec{B}_{2n+1} = \frac{i\omega}{c^2} \int_0^\rho \left(\frac{i\omega}{2c}\right)^{2n} \frac{\vec{E}_0}{(n!)^2} \rho^{2n} 2\pi\rho d\rho$ d'où $\vec{B}_{2n+1} = \frac{(iX)^{2n+1}}{c(n!)((n+1)!)} \vec{E}_0 \vec{u}_\theta$.

b) d'où $\vec{E}_{2n+2} = \frac{(iX)^{2n+2}}{((n+1)!)^2} \vec{E}_0$.

Ainsi, la relation de récurrence est bien démontrée.

II.C.4 a) $\vec{E} = \left(1 - X^2 + \frac{X^4}{4} + \dots + \frac{(iX)^{2n}}{(n!)^2} + \dots\right) \vec{E}_0$ donc $\vec{E} = \vec{E}_0 J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)$

b) $\vec{E} = E \vec{k}$ avec E variant entre $e_0 J_0(\omega\rho/c)$ et $-e_0 J_0(\omega\rho/c)$, c'est-à-dire des sortes d'ondes stationnaires mais dont l'enveloppe n'est pas sinusoïdale : elle correspond à une fonction de Bessel.

Pour $\rho = R$, on a un nœud de champ électrique si : $\omega = 2,4c/R$, ou $\omega = 5,52c/R$, ou $\omega = 8,65c/R$, etc

II.C.5 a) $\vec{E}_{\text{alu}} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{\text{alu}} = \vec{0}$ dans la feuille d'aluminium (conducteur parfait, épaisseur de peau nulle). Les relations de passage entraînent en particulier que le champ électrique soit nul dans le condensateur en $\rho = R$ (continuité du champ électrique tangentiel). D'autre part, le champ magnétique, lui aussi tangentiel, doit vérifier : $\vec{0} - \vec{B}(R, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_\rho$ où \vec{j}_s est la densité de courant surfacique, donc un vecteur orthogonal à \vec{u}_ρ . Puisque le champ magnétique est orthoradial, le courant de surface est axial, et vaut : $\vec{j}_s = -\frac{\vec{B}(R, t)}{\mu_0} \vec{k}$, avec $\vec{B}(R, t) = B(R, t) \vec{u}_\theta$. En posant $\vec{j}_s = j_s \vec{k}$,

on a aussi : $\vec{B}(R, t) = -\mu_0 j_s \vec{u}_\theta$.

b) D'après le II.C.4, $\omega_1 = 2,4c/R$, ou $\omega_2 = 5,52c/R$, ou $\omega_3 = 8,65c/R$, etc

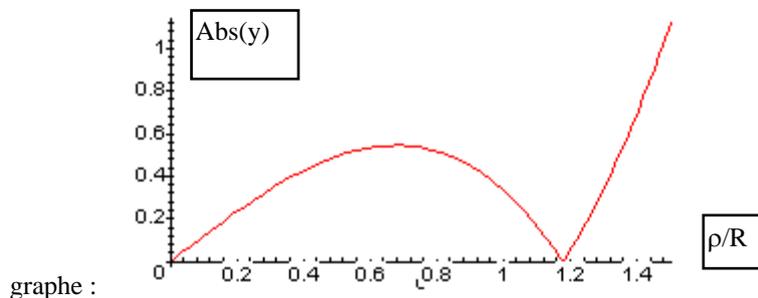
c) Résonance

d) $f_1 = 2,86 \text{ GHz}$.

II.C.6 a) y est sans dimension. $\vec{B} \approx \frac{iX}{c} \left(1 - \frac{X^2}{2}\right) \vec{E}_0 \vec{u}_\theta \approx \frac{1,2i\rho}{cR} \left(1 - 0,72\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right) \vec{E}_0 \vec{u}_\theta$

d'où $\alpha = 1,2$ et $\beta = 0,864$.

$$\rho_{\text{max}} = R \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}} = 0,68 R$$



b) D'après le II.C.5.a, on a $\vec{j}_s = -\frac{\vec{B}(R, t)}{\mu_0} \vec{k}$, ce qui donne une amplitude de la densité de courant surfacique de

891 A.m⁻¹.

c)

II.C.7 Les champs de rang 1, 2, 3, etc seront plus faibles en raison des pertes. Les résonance seront moins aigues.

II.D Calcul direct du champ E total :

II.D.1 A partir des équations de Maxwell, on obtient : $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

II.D.2 A l'aide du formulaire de l'annexe III, on en déduit : $\frac{d^2 \vec{E}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{E}}{d\rho} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0$

II.D.3 En posant $x = \frac{\rho\omega}{c}$, on retrouve bien l'équation de l'énoncé.

II.D.4 Toujours à l'aide du formulaire de l'annexe III, on montre que la solution est de la forme $J_0(x)$ (à une constante spatiale multiplicative près) avec $x = \frac{\rho\omega}{c}$. La solution $J_0(x)\vec{E}_0$ convient donc, puisqu'on doit retrouver le champ \vec{E}_0 sur l'axe.

II.E Introduction d'un diélectrique :

II.E.1 Posons $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$. On remplace partout ϵ_0 par ϵ et c par $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$, d'où $\vec{E} = \vec{E}_0 J_0\left(\frac{\omega\rho\sqrt{\epsilon_r}}{c}\right)$

II.E.2 L'introduction du diélectrique a de l'influence à la fois sur le module de la partie spatiale du champ électrique et sur la fréquence de résonance, car ces 2 quantités s'expriment en fonction de la célérité dans le milieu.