Un joli petit exemple intéressant d'application des mathématiques appliquées au génie météo est l'étude des fameux ballons sondes et particulièrement la caractéristique de leur volume en fonction de l'altitude qui est souvent sujet à débat dans des groupes de discussions lorsque personne n'y formalise le problème une bonne fois pour toute. Vous aurez donc compris que c'est ce que nous allons étudier ici et surtout nous allons tenter de déterminer la diamètre limite théorique aux ballons sondes avant qu'ils n'éclatent.

L'énoncé du problème souvent débattu est le suivant:

Un ballon-sonde de masse m sert à emmener à haute altitude un appareillage en vue d'effectuer des mesures. L'enveloppe du ballon contient n moles de gaz parfait d'hydrogène H_2 ayant donc une masse molaire de :

$$M_m\left(H_2\right) = 4\ [g \cdot mol^{-1}]$$

L'atmosphère sera assimilée à un gaz parfait, de masse molaire moyenne:

$$M_m\left(air\right) \cong 29\ [g \cdot mol^{-1}]$$

aux C.N.T.P. (Conditions Normales de Température et de Pression).

Nous voulons d'abord chercher quelle est la force ascensionnelle F_z ressentie par le ballon?

Ensuite, nous voulons évaluer la quantité de matière minimale n_0 assurant le décollage de celui-ci pour une masse totale (ballon compris!) de 2.6 [Kg]. puis le volume V_0 correspondant, à l'altitude de départ.

Rappelons deux choses pour résoudre déjà ce premier point:

1. Tout corps plongé dans un liquide (ou un gaz) subit une force vers la haut égale au poids du volume qu'il déplace (force d'Archimède) selon la relation démontrée dans le chapitre de Mécanique des milieux continus:

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V = F_z$$

2. Tout gaz parfait ayant une masse en gramme égale à la masse molaire occupe selon la loi des gaz parfaits un volume de 22.4 [L] à 273. 15 [K] et à une pression de 1 [atm] comme nous l'avons démontré dans le chapitre de Chimie Thermique. Ce qui donne aux C.N.T.P:

$$V = nR\frac{T}{P} = 1 \cdot 8.314 \cdot \frac{293.15}{1.01325 \cdot 10^5} \cong 24\ [L]$$

Donc pour que le ballon flotte à hauteur constante (sans monter mais sans tomber aussi…) avec juste la quantité n_0 d'hydrogène suffisante il faut donc d'après le principe d'Archimède que le volume d'air qu'il déplace ait un poids égal à la masse totale du ballon et de la sonde, soit 2 [Kg] dans notre cas!

Donc puisque 24 [L] d'air pèsent environ 29 grammes, il faut que le volume soit tel qu'il déplace 2.6 [Kg] d'air. Soit en faisant une simple règle de trois:

$$\frac{2.6\ [Kg]}{0.029\ [Kg]} \cdot 24\ [L] \cong 2'151\ [L] = 2.151\ [m^3] = V_0$$

Donc si le ballon est sphérique, cela donne un rayon de:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \Rightarrow R_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V} \cong 80\ [cm]$$

Soit un diamètre d'environ 1.6 [m]. Ce qui est conforme à la réalité!

Il nous faut encore déterminer le nombre de moles d'hydrogène. Il vient immédiatement:

$$n_0 = \frac{2.6}{0.029} \cong 90\ [moles]$$

Maintenant que nous connaissons le nombre de moles dans la ballon, si nous connaissons la température et la pression à une hauteur de 22'000 mètres (altitude type d'une petit ballon sonde) il ne nous reste qu'à appliquer la loi des gaz parfait pour connaître le volume à cette altitude donné alors par la relation démontrée dans le chapitre de Mécanique des Milieux Continus:

$$V = n_0 R \frac{T}{P}$$

ainsi à 22'000 mètres d'altitude nous avons environ:

$$T \cong 218\ [K]$$
$$P \cong 5.4 \cdot 10^3\ [Pa]$$

Mais au fait le rayonnement solaire est environ 30% plus élevé à cette altitude et le ballon est considéré comme un système adiabatique (sans échange de chaleur) et ne restitue donc pas la puissance emmagasinée à l'environnement extérieur. Nous considérons alors que la température est au 30% moins élevée ce qui nous donne comme chiffres:

$$T \cong 293\ [K]$$
$$P \cong 5.4 \cdot 10^3\ [Pa]$$

Nous avons donc:

$$V = n_0 R \frac{T}{P} \cong 90 \cdot 8.314 \cdot \frac{293}{5.4 \cdot 10^3} \cong 40$$

Nous aurions pu également utiliser (hypothèse adiabatique oblige!) la relation de Boyle-Mariotte (cf. chapitre de Mécanique des Milieux Continus) pour arriver au même résultat:

$$P_0 \cdot V_0 = P \cdot V \Rightarrow V = \frac{P_0 \cdot V_0}{P}$$

Ce qui donne un rayon d'environ 2.12 [m] (diamètre d'environ 4.2 [m]) au lieu des 73 [cm] au sol! Soit une augmentation du diamètre de 290%.