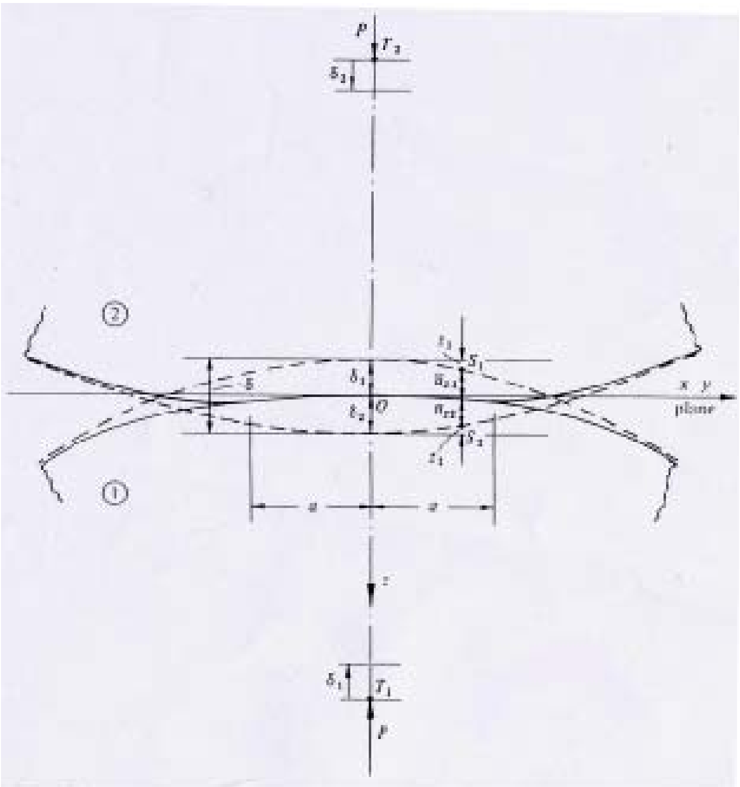
CONTACT : THEORIE DE HERTZ

I APPROCHE GEOMETRIQUE

Les surfaces :



Quand deux solides **1** et **2** non conformes sont mis en contact sous charge ils se touchent dans un premier temps en un point O puis sur une surface finie, petite face aux dimensions des deux solides. Cette surface augmente à mesure que la charge augmente.

$\left(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}\right)=\left(O,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2}\right)$ est le plan tangent aux deux surfaces en contact.

Chaque surface est considérée lisse aux échelles micro et macroscopique. Ainsi, le contact est continu et en choisissant judicieusement $\left(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}\right)$, la surface Σ_1 de **1** autour du point de premier contact a pour équation : $z_1=\frac{\rho_1'}{2}x_1^2+\frac{\rho_1''}{2}y_1^2$ (1)

Rq : ρ_1' et ρ_1'' sont les courbures principales de **1** en O. C'est à dire les extrema de toute les courbures de **1** sur l'ensemble des plans contenant $\left(O,\vec{z}\right)$.

De même, pour le solide 2 l'équation de Σ_2 au voisinage de O s'écrit :

$$z_2=-\left(\frac{\rho_2'}{2}x_2^2+\frac{\rho_2''}{2}y_2^2\right) \qquad (2)$$

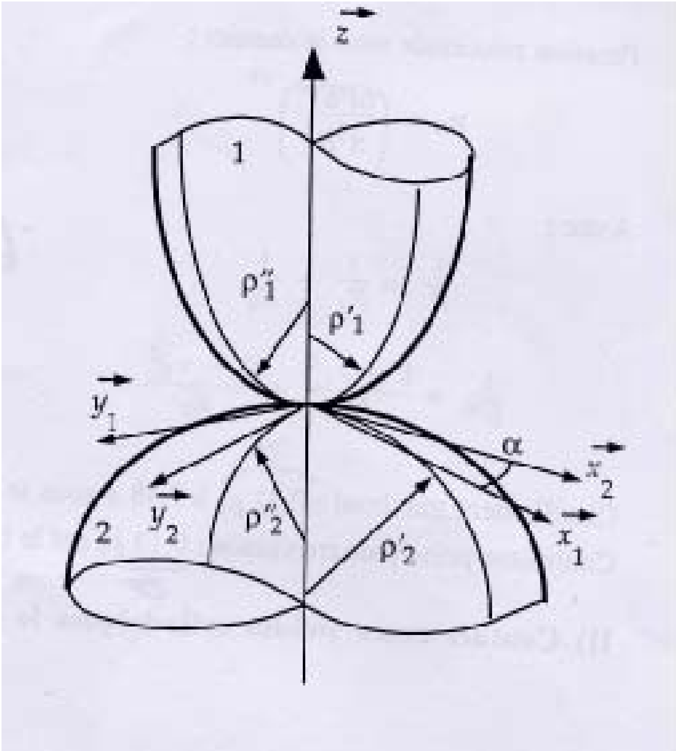
La distance h entre les deux surfaces s'obtient à partir de (1) et (2) en écrivant $h = z_1 - z_2$
Un choix approprie de $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ permet alors d'écrire : $h = A.x^2 + B.y^2$ (3)

Les déformations :

On applique une charge P et les solides se rapprochent. On note S_1 et S_2 deux points respectivement de **1** et **2** de projection commune S sur $\left(O,\vec{x},\vec{y}\right)$.

Si les solides s'étaient déplacés sans se déformer, S_1 se serait translaté de δ_1 et S_2 de δ_2 selon $\vec{z}$.

Or les solides 1 et 2 se déforment selon $\vec{z}$ pendant la compression due à P. Notons $\overline{u_{z1}}$ et $\overline{u_{z2}}$ (valeurs positives) les déplacements suivant $\vec{z}$ des solides **1** et **2** en S_1 et S_2.



Si après déformation $S_1=S_2=S$ ce qui signifie que les solides se touchent en S alors : $\delta=\delta_1+\delta_2=h+\overline{u_{z1}}+\overline{u_{z2}}$ soit :

$\boxed{\overline{u_{z1}}+\overline{u_{z2}}=\delta-A.x^2-B.y^2}$ (4)

Sinon, si les solides ne se touchent pas en S : $\boxed{\overline{u_{z1}}+\overline{u_{z2}}<\delta-A.x^2-B.y^2}$ (5)

Approche en contrainte :

Pour simplifier on regarde le problème en 2-D et on choisit les deux solides comme étant de révolution (rayons R_1 et R_2), la zone de contact ayant pour largeur 2a .

(4) donne en remarquant que $\delta_1=\overline{u_{z1}}(0)$ et $\delta_2=\overline{u_{z2}}(0)$ en l'exprimant sous forme adimensionnée : $\left(\frac{\overline{u_{z1}}(0)}{a}-\frac{\overline{u_{z1}}(x)}{a}\right)+\left(\frac{\overline{u_{z2}}(0)}{a}-\frac{\overline{u_{z2}}(x)}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{x^2}{a}$

Pour x=a et en écrivant $\overline{u_z}(0)-\overline{u_z}(a)=d$ on obtient : $\frac{d_1}{a}-\frac{d_2}{a}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$

Nous sommes en petite déformations (d<<a) donc les déformations dans chaque solides sont caractérisées par un ratio $\frac{d}{a}$. Or $\frac{d}{a}\sim\frac{p_m}{E}$ ou p_m est la pression moyenne au contact

donc : $p_m\sim\frac{a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}{\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}}$.

Ainsi, pour une géométrie donnée, **la pression de contact et les déformations associées augmentent en proportion directe avec la zone de contact**.

II THEORIE DE HERTZ

Hertz formula les conditions (4) et (5) que doivent satisfaire les déplacements normaux a la surface des solides.
Il fit ensuite les hypothèses suivantes :

(i) Les surfaces sont continues et non conformes : a<<R
(ii) Les déformations sont petites : a<<R
(iii) Chaque solide est considéré comme un espace élastique semi infini : a<<l et a<<$R_{1,2}$
(iv) pas de frottement au contact : $p_x = p_y = 0$

A/ Cas des solides de révolution

Les solides étant de révolution , la surface de contact est un cercle de rayon a et $R'_1=R''_1=R_1$, *et* $R'_2=R''_2=R_2$. Ce qui donne pour les constantes A et B :

$$A = B = 1/2(1/R_1+1/R_2)$$

On pose $r^2 = x^2+y^2$ afin de donner la nouvelle expression du déplacement des surfaces dans la zone de contact :

$$\overline{u_{z1}} + \overline{u_{z2}} = \delta - 1/2(1/2R)r^2$$

Pour donner lieu à ce type de déplacement Hertz propose une répartition de pression :

$$p(r) = p_0\left(1-(r/a)^2\right)^{1/2}$$

La résolution du problème élastique nous donne le déplacement normal sur la zone ou s'applique la pression :

$$\overline{u_z} = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\pi p_0}{4a}\left(2a^2 - r^2\right) \text{ pour r<ou=a}$$

En vertu du principe de l'interaction des forces cette expression du déplacement de la surface est valable pour les deux solides. Donc après avoir posé :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^{\,2}}{E_1} + \frac{1-\nu_2^{\,2}}{E_2}$$

on peut remplacer dans l'expression des déplacements des surfaces, on obtient :

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*}\left(2a^2 - r^2\right) = \delta - \left(1/2R\right)r^2$$

On obtient alors une égalité entre deux polynômes du second degré en r, en identifiant les coefficients on trouve les valeur de a et δ :

$$a = \pi p_0 R / 2E^*$$

$$\delta = \pi a p_0 / 2E^*$$

La charge totale est reliée à la distribution de pression par :

$$P = \int_0^a p(r) 2\pi r dr = 2/3\, p_0 \pi a^2$$

D'ou les formules :

$$\boxed{p_0 = \left(\frac{6PE^{*2}}{p^3 R^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\boxed{a = \left(\frac{3PR}{4E^*}\right)^{\frac{1}{3}}} \tag{6}$$

$$\boxed{\delta = \left(\frac{9P^2}{16RE^{*2}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

La contrainte maximale à l'intérieur du solide a une valeur de $0.31p_o$ à une profondeur de 0.48a.

B/Cas général

Dans le cas général la forme de la surface de contact n'est pas connue avec certitude, on suppose que cette surface est une ellipse. Par analogie avec le cas des solides de révolution Hertz propose la répartition de pression suivante :

$$p = p_0\left[1 - (x/a)^2 - (y/b)^2\right]^{1/2}$$

Une telle répartition de pression donne lieu à un déplacement normal des surfaces (au niveau du contact) :

$$\overline{u_z} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(L - Mx^2 - Ny^2\right)$$

Pour les deux solides :

$$\overline{u_{z1}} + \overline{u_{z2}} = \left(L - Mx^2 - Ny^2\right)/\pi E^*$$

Les déplacements vérifient aussi l'équation : $\overline{u_{z1}} + \overline{u_{z2}} = \delta - A.x^2 - B.y^2$

On en déduit les relations :

$$A=M/\pi E^*=(p_0/E^*)(b/e^2a^2)\{\mathbf{K}(e)-\mathbf{E}(e)\}$$
$$B=N/\pi E^*=(p_0/E^*)(b/e^2a^2)\{(a^2/b^2)\mathbf{E}(e)-\mathbf{K}(e)\} \qquad (7)$$
$$\delta=L/\pi E^*=(p_0/E^*)b\mathbf{K}(e)$$

Ou **E**(e) et **K**(e) sont des intégrales de la variable $e=(1-(b/a)^2)^{1/2}$, on remarquera que e ne dépend que du rapport b/a.

En intégrant la distribution de pression sur la surface on obtient l'expression du chargement en fonction de la pression maximale et des caractéristiques de la surface de contact :

$$P=(2/3)p_0\pi ab$$

On a vu au 1 que :

$$(AB)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'R''}\right)^{1/2} = \frac{1}{2R_e}$$

En remplacent A et B par leur expression plus haut (7) :

$$(AB)^{1/2} = \frac{p_0}{E^*}\frac{b}{a^2e^2}\left[\left\{(a/b)^2 E(e) - K(e)\right\}\left\{K(e) - E(e)\right\}\right]^{1/2}$$

$$c^3 = (ab)^{1/2} = \left(\frac{3PR_e}{4E^*}\right)\frac{4}{\pi e^2}(b/a)^{3/2}\left[\left\{(ab)^2\,\mathrm{E(e)\text{-}K(e)}\right\}\left\{\mathrm{K(e)\text{-}E(e)}\right\}\right]^{1/2}$$

On peut exprimer $c=(ab)^{1/2}$ en fonction du chargement et de la géométrie du problème :

$$\boxed{c = (ab)^{1/2} = \left(\frac{3PR_e}{4E^*}\right)^{1/3} \mathrm{F_1(e)}}$$

Cette seule équation ne nous suffit pas pour déterminer a et b, pour ce faire nous allons exprimer le rapport A/B=R'/R'' en fonction de e et donc du rapport b/a :

$$\frac{B}{A}=\frac{R'}{R''}=\frac{(a/b)^2\,\mathrm{E(e)}\text{-}\mathrm{K(e)}}{\mathrm{K(e)}\text{-}\mathrm{E(e)}}$$

On peut alors déterminer a et b en fonction des données du problèmes (géométrie et chargement).

D'après (7) :

$$\delta=\frac{3P}{2\pi abE^*}b\mathrm{K(e)}$$

Exprimons ce déplacement en fonction du rapport b/a :

$$\delta=\left(\frac{9P^2}{16E^{*2}}\right)^{1/3}\frac{2}{\pi}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\left\{\mathrm{F_1(e)}\right\}^{1/3}\mathrm{K(e)}$$

$$\boxed{\delta=\left(\frac{9P^2}{16E^{*2}}\right)^{1/3}F_2(e)}$$

On fait de même pour la pression maximale p_0 :

$$\boxed{p_0=\frac{3P}{2\pi ab}=\left(\frac{6PE^{*2}}{\pi^3R^{*2}}\right)^{1/3}\left\{\mathrm{F_1(e)}\right\}^{-2/3}}$$

En comparant les expressions de c, δ et p_0 ci dessus à celle trouvées dans le cas des solides de révolution (6) , on peut interpréter le second terme comme un facteur correctif. Ces facteurs correctifs F1(e) et F2(e) sont calculés numériquement, des abaques ont été publiées.

C/Cas du contact cylindrique

On considère deux solides en contact le long d'une ligne. Ces deux solides sont mis en contact sous l'effet d'une charge (normale au plan tangent commun aux deux surfaces) exprimé par unité de longueur. Le problème devient plan.

Le déplacement normal des surfaces (de contact) devient :

$$\overline{u_{z1}}+\overline{u_{z2}}=\delta-Ax=\delta-1/2\left(1/R\right)x^2$$

Dérivons l'équation précédente par rapport à x:

$$\frac{\overline{\partial u_{z1}}}{\partial x}+\frac{\overline{\partial u_{z2}}}{\partial x}=-\left(1/R\right)x$$

L'élasticité du problème nous permet d'exprimer le gradient des déplacements en fonction de la répartition de la pression sur la surface de contact (conditions limites). Cette répartition étant la même pour les deux solides :

$$\frac{\overline{\partial u_{z1}}}{\partial x}+\frac{\overline{\partial u_{z2}}}{\partial x}=-\frac{2}{\pi E^*}\int_{-a}^{a}\frac{p(s)}{x-s}ds$$

En remplacent dans l'expression précédente :

$$\int_{-a}^{a}\frac{p(s)}{x-s}ds=\frac{\pi E^*}{2R}x$$

Cette équation a pour solution :

$$p(x)=-\frac{\pi E^*}{2R}\frac{x^2-a^2/2}{\pi\left(a^2-x^2\right)^{1/2}}+\frac{P}{\pi\left(a^2-x^2\right)^{1/2}}$$

On remarquera que cette expression fait intervenir directement le chargement. Dans un premier temps on notera que la pression ne peut pas être négative, ce qui implique :

$$P\geq\pi a^2E^*/4R$$

Dans un second temps, on peut constater que pour une valeur de la charge supérieure à $\pi a^2E^*/4R$ la pression est infini aux extrémités du contact (en $x=\pm a$), on en conclu :

$$P=\pi a^2E^*/4R$$

On a donc déterminé la valeur de a et la répartition de la pression :

$$\boxed{a^2=\frac{4PR}{\pi E^*}}$$

$$p(x)=\frac{2P}{\pi a^2}(a^2-x^2)^{1/2}$$

D'ou la pression maximale :

$$\boxed{p_0=\frac{2P}{\pi a^2}=\frac{4}{\pi}p_m=\left(\frac{PE^*}{\pi R}\right)^{1/2}}$$

La contrainte maximale à l'intérieur du solide a une valeur de $0.30p_o$ à une profondeur de 0.78a.