

Chapitre 2 :

Formations des images

I Définition de quelques concepts :

Un dioptré : est une surface qui sépare 2 milieux d'indices de réfraction différents. Un **dioptré sphérique** est une surface sphérique réfringente, parfaitement polie, séparant deux milieux (homogènes et transparents) d'indices différents. Dans la pratique, les seules surfaces réalisables en série sont des surfaces sphériques. Cela justifie l'importance de leur étude.

Système optique : c'est une succession de milieux transparents séparés par des dioptrés. Il est constitué d'un axe de révolution (axe optique) d'un dioptré d'entrée et d'un dioptré de sortie. Pour un système catadioptrique, le dioptré de sortie se confond au dioptré d'entrée.

Source ou Objet : c'est un ensemble de points d'où partent des rayons lumineux. L'objet est constitué par l'ensemble des points de convergence des rayons lumineux arrivant sur le système. Lorsque ces rayons divergent, le lieu de convergence de leurs prolongements constitue un **objet virtuel**. En général, une source lumineuse émet une lumière complexe formée par la superposition de diverses **radiations monochromatiques**. On appelle **spectre** de la lumière complexe, l'ensemble de ces radiations ; on distingue :

- Les **spectres continus** où les radiations présentes ont des fréquences variables de façon continue. C'est le cas pour les sources à incandescence ;
- Les **spectres discontinus** ou **spectres de raies**, dans lesquels, seules sont présentes certaines fréquences sans passage continu de l'une à l'autre.

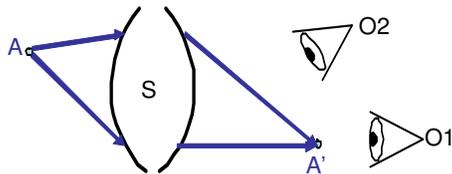
Image : tous les rayons issus d'un objet A, arrivent après leur passage dans le système optique, en un point A' : Ce point A' est l'image de A. **A et A'** sont dits **conjugués par le système**. L'image est le lieu de convergence des rayons issus du système. Lorsque ces rayons divergent, leurs prolongements convergent pour former une **image virtuelle**.

Miroir : c'est un dioptré particulier. Un miroir est une surface réfléchissante, définie par son rayon et son centre de courbure. C'est un cas de système catoptrique.

Nature de l'objet et de l'image :

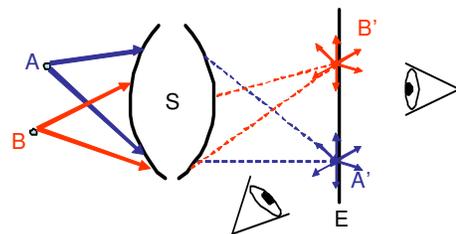
On oriente l'espace dans le sens de propagation de la lumière (cf. schéma pour un système dioptrique).

Image réelle



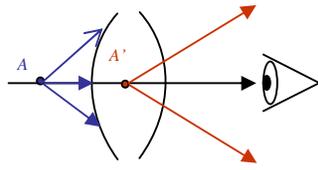
Soit un système optique S qui donne d'un point-objet A, un point-image A'. L'image A' est le point de convergence des rayons issus de l'objet A et ayant traversé le système S. Les rayons constitutifs de l'image passent **réellement** par A' qui, pour cette raison, est dite **image réelle**. L'image A' peut être observée par l'œil placé en O1 mais ne peut être observée par l'œil placé en O2.

Un objet étendu est constitué de plusieurs points-objets {A, B, C, ...}. Un tel objet admet, par le système S, une image étendue constituée d'un ensemble de points {A', B', C', ...}. L'œil ne peut observer simultanément ces points-images. Il devrait se déplacer pour les observer une à une. L'image globale ne peut donc être vue sauf si on place un écran diffusant E sur lequel chaque point-image renvoie la lumière dans toutes les directions. Dans ce cas l'ensemble des



points-images peuvent être vus simultanément par un grand nombre d'observateurs. Ce procédé est utilisé pour la projection d'images.

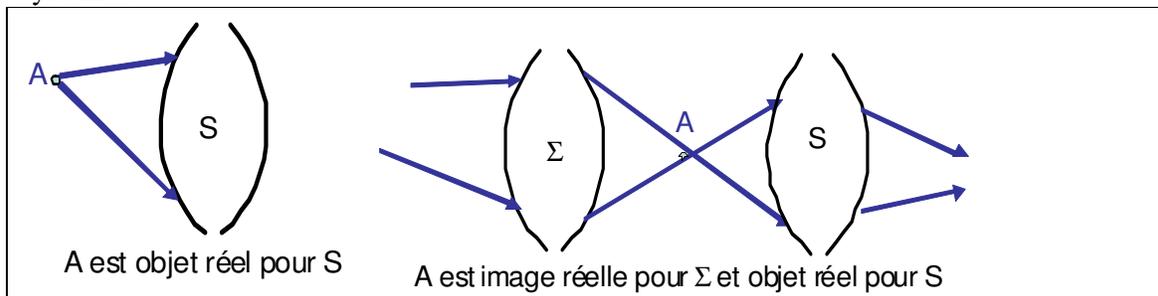
Image virtuelle



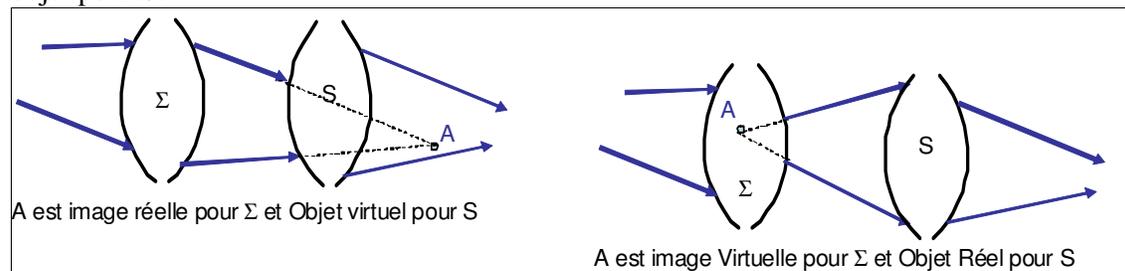
Dans ce cas, tout se passe pour l'observateur O1 comme s'il y avait une source en A' et que le milieu homogène où se trouve l'œil s'étend vers la gauche au-delà de A'. L'observateur O1 localise donc l'image en A' comme dans le cas d'une image réelle. Cette localisation peut d'ailleurs être quantifiée par des mesures géométriques ne nécessitant pas d'atteindre matériellement le point A'. cependant **les rayons qui semblent provenir de A' ne passent pas réellement par ce point de convergence**. A' est une donc **image virtuelle**. Il est impossible de placer un écran E en A' pour faire voir cette image à un observateur situé en un lieu quelconque par diffusion. Si on place un écran sur le trajet des rayons sortant du système, on n'observe pas un point lumineux (A') mais une tache plus ou moins grande suivant sa position et l'ouverture du faisceau.

Objet réel

Dans les exemples précédents, le point-objet A est qualifié d'**objet réel**. Il peut être constitué par la source elle-même, mais peut aussi être le **point réel de convergence des rayons** sortant d'un système précédent, lui-même éclairé par la source ou par l'intermédiaire d'autres systèmes.

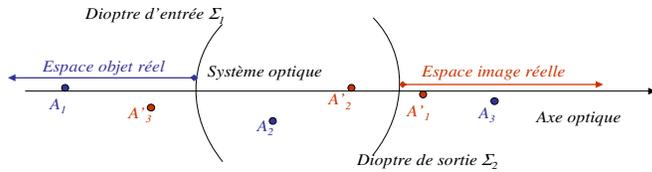


Les rayons issus de Σ peuvent rencontrer S avant d'atteindre leur point de convergence A. comme A reste le point de convergence des rayons arrivant sur S, on dira encore que A est objet pour S.



Espaces objet, espace image

La portion de l'espace antérieure au système est appelée **espace objet réel**. C'est la portion d'espace où se propagent réellement les rayons issus de l'objet.

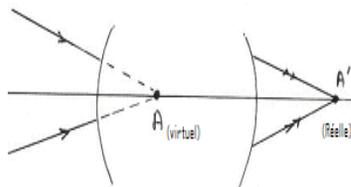


- Tout objet situé dans l'espace objet réel est un **objet réel** (exemple : A1)
 - Tout **objet** en dehors de l'espace objet réel **virtuel** (A2 ou A3).
- De même, la portion de l'espace située après le système est appelée **espace image réel**. C'est la portion d'espace où se propagent réellement les rayons issus de l'image.
- Toute image formée dans l'espace image réelle est une **image réelle** (A'1). Une image réelle est observable sur un écran placé dans l'espace réel.
 - Une image formée en dehors de l'espace image réelle est une **image virtuelle** (A'2 et A'3). Elle n'est pas observable sur un écran. Une image virtuelle s'observe à travers le système optique (principe de la loupe).

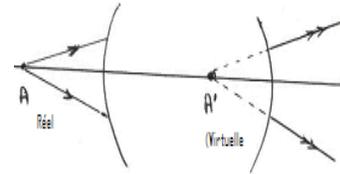
Dans le cas des systèmes catadioptriques, la face d'entrée est aussi face de sortie. Le dédoublement de l'espace existe toujours, mais l'espace objet réel et l'espace image réel sont tous deux en avant de la face d'entrée. L'espace objet virtuel et l'espace image virtuel sont tous deux en arrière de la face d'entrée.

Remarque :

1. Un objet réel ou une image réelle se trouvent toujours à l'intersection d'au moins deux rayons lumineux.

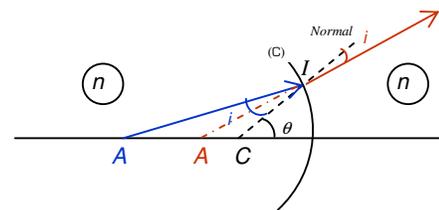


2. Par contre, un objet ou une image virtuels se trouvent à l'intersection des prolongements des rayons lumineux (figure)

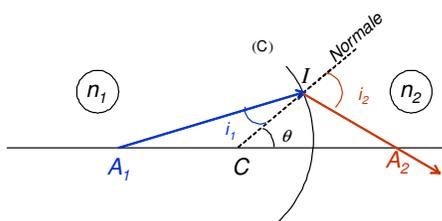


II Invariant fondamental :

Soit un dioptre sphérique de centre C, de rayon de courbure R, séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 . Considérons un objet ponctuel A_1 (réel, situé dans le milieu d'indice n_1 pour le cas de notre exemple). Le système admet une symétrie de révolution autour de la droite CA_1 . Nous choisissons de travailler dans un plan qui contient C et un rayon incident quelconque A_1I . La généralité ne sera donc pas restreinte par ce choix. En effet, un tel plan coupe le dioptre suivant un cercle (C). Par la suite, il suffira de faire tourner la figure (plane) autour de cet axe (CA_1) pour obtenir successivement tous les rayons de l'espace.



D'après la première loi de Descartes pour la réfraction, le rayon réfracté reste dans ce plan et coupe CA_1 au point A_2 . En utilisant le théorème des sinus, on obtient, respectivement pour les triangles CIA_1 et CIA_2 , les relations suivantes :



$$\frac{IA_1}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{CA_1}{\sin i_1} = \frac{IA_1}{\sin \theta} \text{ et}$$

$$\frac{IA_2}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{CA_2}{\sin i_2} = \frac{IA_2}{\sin \theta}$$

Soient : $\sin i_1 = \frac{CA_1}{IA_1} \sin \theta$ et $\sin i_2 = \frac{CA_2}{IA_2} \sin \theta$

Ces mêmes relations se vérifient pour n'importe quel cas de figure comme on peut le constater sur le cas de la figure ci-contre, où l'image réelle par exemple.

La deuxième loi de Descartes pour la réfraction peut alors s'écrire :

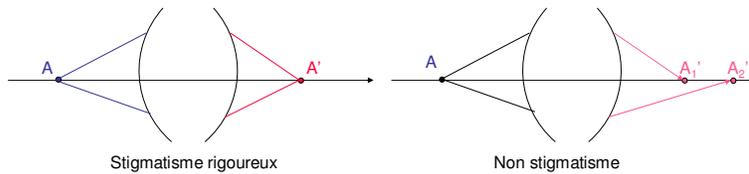
$$n_1 \frac{CA_1}{IA_1} \sin \theta = n_2 \frac{CA_2}{IA_2} \sin \theta \text{ soit } \boxed{n_1 \frac{CA_1}{IA_1} = n_2 \frac{CA_2}{IA_2}}$$

Cette dernière relation exprime qu'**au cours de la traversée d'un dioptre sphérique, la quantité $n \frac{CA}{IA}$ reste invariable : c'est l'invariant fondamental.**

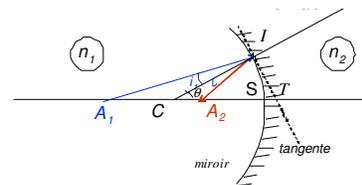
III Stigmatisme et Aplanétisme :

III.1 Définitions :

Le **système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple objet/image (A/A')** si tout rayon passant par A avant d'atteindre le système, émerge du système en passant par A' qui sera l'image de A.



Soit par exemple A_1 un objet ponctuel placé dans devant un miroir sphérique (concave ici) de centre C. Il y a un stigmatisme si tous les rayons réfléchis passent par un même point A_2 , qui sera l'image de A_1 . Si nous considérons un rayon incident A_1I quelconque, il est réfléchi par le miroir en I et le rayon réfléchi A_2I fait avec la normale CI un angle égal à l'angle d'incidence (deuxième loi de Descartes pour la réflexion). **La condition nécessaire et suffisante de stigmatisme rigoureux est que la position de A_2 soit indépendante de la position du point d'incidence sur le dioptre, c'est à dire de θ .** En effet, s'il y a un stigmatisme, l'image ne peut être qu'en A_2 , puisque nous savons que les rayons réfléchis A_1IA_2 et A_1SA_2 passent par A_2 . Déterminons à présent la position A_2 .



Les droites IC et IT sont bissectrices des angles formés par IA_1 et IA_2 ; La division (TCA_1A_2) est harmonique, d'où : $\frac{1}{CA_1} + \frac{1}{CA_2} = \frac{2}{TC}$

Comme $\overline{CT} \cos \theta = CI = \overline{CS}$, on tire : $\boxed{\frac{1}{CA_1} + \frac{1}{CA_2} = \frac{2 \cos \theta}{CS}}$

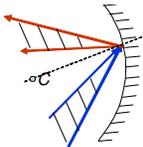
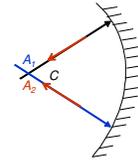
Cette relation générale montre que pour un point A_1 (objet) donné, la position de l'image A_2 dépend de la position du point d'incidence I (c.-à-d. de θ). Cela signifie **qu'il n'y a pas de stigmatisme rigoureux en général.**

Si nous posons : $\overline{CA_1} = z_1$; $\overline{CA_2} = z_2$ et $\overline{CS} = R$, nous obtenons :

$$z_2 = -\frac{z_1}{1 - \frac{2z_1}{R} \cos \theta}$$

On voit que le **stigmatisme rigoureux** n'est réalisé que si :

- i) $z_1 = 0$ et donc $z_2 = 0$ (quelque soit θ) ; c'est le cas lorsque le point objet A_1 est au centre du miroir ;



- ii) $\theta = 0$ donc z_2 ne varie pas ; le point objet est sur la surface du miroir

Remarque :

Les surfaces à stigmatisme rigoureux sont :

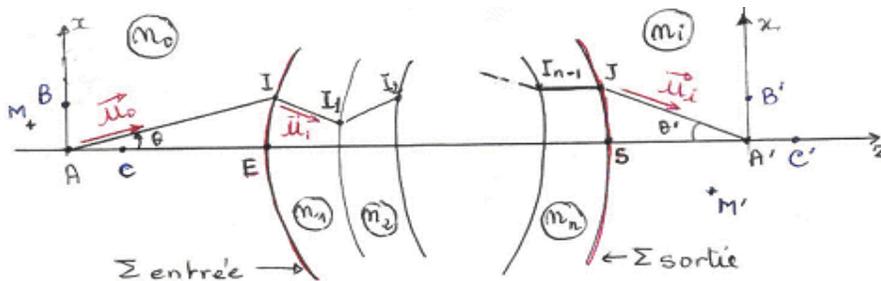
- Les coniques (ellipsoïdes, paraboloides, hyperboloïdes) pour la réflexion ;
- Les ovales de DESCARTES (courbes du 4^e ordre) pour la réfraction.

Cependant, il est difficile de réaliser ces surfaces avec du verre ou bien d'autres matériaux.

Dans la pratique, on se contentera du stigmatisme approché (voir § III.3).

III.2 Conservation du stigmatisme approché dans l'espace:

A/A' un couple de points conjugués situé sur l'axe optique Oz d'un système centré.



Le chemin optique $[AA'] = L_{AA'} = n_0 \overline{AI} + [IJ] + n_i \overline{JA'} = cte$ [2.1]

Choisissons un point M voisin de A et M' voisin de A'. On sait que le chemin optique :

$$[MM'] = L_{MM'} = cte$$
 [2.2]

Il en est donc de même de la différence des chemins optiques :

$$[MM'] - L_{AA'} = cte$$
 [2.3]

Or on sait que :

$$\begin{aligned} L_{MM'} - L_{AA'} &= n_0 \vec{u}_0 \cdot (\overrightarrow{\Delta I} - \overrightarrow{\Delta A}) + n_1 \vec{u}_1 \cdot (\overrightarrow{\Delta I_1} - \overrightarrow{\Delta I}) + n_2 \vec{u}_2 \cdot (\overrightarrow{\Delta I_2} - \overrightarrow{\Delta I_1}) + \dots \\ &+ \dots + n_n \vec{u}_n \cdot (\overrightarrow{\Delta I_{n-1}} - \overrightarrow{\Delta J}) + n_i \vec{u}_i \cdot (\overrightarrow{\Delta A'} - \overrightarrow{\Delta J}) \\ &= -n_0 \vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{AM} + (n_0 \vec{u}_0 - n_1 \vec{u}_1) \cdot \overrightarrow{\Delta I} + (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{\Delta I_1} + (n_2 \vec{u}_2 - n_3 \vec{u}_3) \cdot \overrightarrow{\Delta I_2} + \dots + n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A'M'} \end{aligned}$$
 [2.4]

avec : n_1 = indice du premier milieu rencontré dans l'instrument ;

$I I_1$ = première portion du rayon lumineux dans l'instrument

D'après le principe de FERMAT traduit par la loi de DESCARTES :

$$(n_k \vec{u}_k - n_{k+1} \vec{u}_{k+1}) \cdot \overrightarrow{\Delta I_k} = 0$$
 [1.5]

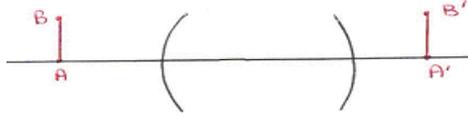
sur chacune des surfaces (k) rencontrées.

Après neutralisation des termes intermédiaires, [2.4] se réduit finalement à :

$$\boxed{n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A'M'} - n_0 \vec{u}_0 \cdot \overrightarrow{AM} = cte}$$
 [2.5]

III.2.1 Aplanétisme ou stigmatisme transversal : Condition des sinus d'ABBE

Soit un Système stigmatique pour le couple A/A'. **Le système est dit aplanétique pour A/A' s'il donne d'un objet AB ⊥ à l'axe, une image A'B' ⊥ à l'axe.**



L'aplanétisme est la conservation du stigmatisme dans un plan de front ⊥ à l'axe optique. Dans le plan xOz (un raisonnement analogue pourra être reconduit dans le plan yOz, également ⊥ à l'axe optique Oz), considérons les points B et B' voisins respectifs de A et A'

On sait que : $\theta = (\vec{k}, \vec{u}_0)$ et $\theta' = (\vec{k}, \vec{u}_i)$ [2.6]

Il vient : $\vec{u}_0 \cdot \vec{AB} = AB \sin \theta$ et $\vec{u}_i \cdot \vec{A'B'} = A'B' \sin \theta'$ [2.7a].

En combinant cette relation [2.7] avec [2.5], il vient :

$$n_i \vec{u}_i \cdot \vec{A'B'} - n_o \vec{u}_0 \cdot \vec{AB} = n_i A'B' \sin \theta' - n_o AB \sin \theta = cte \quad [2.8a].$$

Pour $\theta = 0$, on a $\theta' = 0$ ce qui donne avec [2.8a] que la constante est nulle : $cte=0$ soit finalement :

$$\boxed{n_o AB \sin \theta = n_i A'B' \sin \theta'} \quad [2.9a].$$

En considérant le grandissement transversal

$$G_t = \frac{\text{Taille de l'image}}{\text{Taille de l'objet}} = \frac{A'B'}{AB} \quad [2.10a]$$

la relation [2.9] qui traduit le *stigmatisme transversal* ou *aplanétisme* devient :

$$\boxed{\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{n_i}{n_o} G_t} \quad [2.11a].$$

III.2.2. Stigmatisme longitudinal, Condition de HERSCHEL

Cette condition exprime la conservation du stigmatisme le long de l'axe optique (stigmatisme longitudinal) du système centré.

Sur Oz considérons C et C' voisins respectifs de A et A', la relation [2.5] devient, en considérant $M \equiv C$ et $M' \equiv C'$:

$$n_i \vec{u}_i \cdot \vec{A'C'} - n_o \vec{u}_0 \cdot \vec{AC} = cte \quad [2.7b]$$

Soit en tenant compte des angle θ et θ' :

$$n_o \overline{AC} \cos \theta - n_i \overline{A'C'} \cos \theta' = cte \quad [2.8b]$$

Pour $\theta = 0$, on a $\theta' = 0$, trouve la valeur de la constante en calculant [2.8b] :

$$cte = n_i \overline{A'C'} - n_o \overline{AC} \quad [2.12]$$

En tenant compte de cette valeur de la constante, la relation [2.8b] qui exprime le stigmatisme longitudinal s'écrit :

$$n_i \overline{A'C'} \cos \theta' - n_o \overline{AC} \cos \theta = n_i \overline{A'C'} - n_o \overline{AC}$$

Que l'on peut écrire : $n_i \overline{A'C'} (1 - \cos \theta') = n_o \overline{AC} (1 - \cos \theta)$

Ou encore :

$$\boxed{n_i \overline{A'C'} \sin^2 \frac{\theta'}{2} = n_o \overline{AC} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad [2.9b]$$

En considérant le grandissement longitudinal

$$G_L = \frac{\text{Taille de l'image}}{\text{Taille de l'objet}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \quad [2.10b].$$

la relation [2.9] qui traduit le *stigmatisme transversal* ou *aplanétisme* devient :

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)} = \frac{n_i}{n_o} G_L \quad [2.11b].$$

III.2.3 Conditions de stigmatisme tridimensionnel (3D)

La conservation du stigmatisme dans des volumes (3D) entourant respectivement A et A' suppose que les conditions d'ABBE et de HERSCHEL soient vérifiées simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{n_i}{n_o} G_t \\ \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)} = \frac{n_i}{n_o} G_L \end{array} \right. \quad [2.13] \text{ c'est à dire si : } \quad \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)} = \frac{n_i}{n_o} \frac{G_t^2}{G_L} \quad [2.14].$$

Si $\theta = 0$, alors $\theta' = 0$ également et le rapport est égal à l'unité :

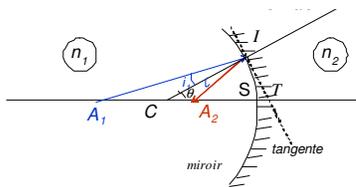
$$\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)} = 1 = \frac{n_i}{n_o} \frac{G_t^2}{G_L} \quad [2.15].$$

Le Stigmatisme 3D n'est réalisé que si $\theta' = \pm \theta$. Un tel *instrument*, dit *parfait*, ne présente qu'un intérêt partiel puisque son grandissement transversal est limité à :

$$G_t = \pm \frac{n_o}{n_i} \quad \text{si } \theta = \pm \theta'$$

Exemple d'instrument parfait : le miroir plan ; $\theta' = -\theta$; $G_T = 1$

III.3 Cas pratiques de stigmatisme approché:



on considèrera qu'il y a stigmatisme lorsque la position de l'image A₂ est très peu sensible aux valeurs de θ . Cela veut dire que les supports de tous les rayons émergents convergent vers A₂ quelque soit le position du point d'incidence I sur le dioptre.

a. Comme le stigmatisme rigoureux est réalisé pour un point image A₁ situé au centre C du miroir, étudions

le comportement de points objet au voisinage de C :

Partons de la relation entre les positions de l'objet A₁ et de son image A₂ :

$$z_2 = -\frac{z_1}{1 - \frac{2z_1}{R} \cos \theta}$$

Si le point objet A₁ se trouve au voisinage du centre C du dioptre, on a $z_1 \ll R$ et donc

$z_2 = -z_1 \left(1 + 2 \frac{z_1}{R} \cos \theta + \dots \right)$; soit $z_2 \approx -z_1$ quelque soit l'angle θ (avec une variation relative

inférieure à $2 \frac{z_1}{R}$, puisque $-1 \leq \cos \theta \leq 1$).

b. On peut aussi s'attendre à voir le stigmatisme (approché) réalisé pour des points objets situés près de la surface du dioptre. Pour des points A₁ situés près la surface du

dioptré, il est clair que, même pour une ouverture assez grande du faisceau incident (qu'il émet), l'angle θ restera petit et donc la variation de $\cos \theta$ sera faible également ; le stigmatisme approché sera alors réalisé.

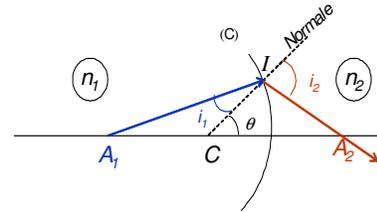
- c. L'étude qu'on vient de présenter montre qu'il y a stigmatisme approché au voisinage des points de stigmatisme rigoureux (entre et surface du dioptré). Dans la pratique cette étude présente peu d'intérêt. En effet, dans la pratique, la position de l'objet est en général imposée. Aussi les résultats ci-dessus obtenus ne sont pas généralisables aux systèmes optiques complexes, formés en associant des systèmes simples. Pour une étude générale, nous devons répondre à la question suivante : **Peut-il y avoir stigmatisme approché pour une position quelconque z_1 du point A_1 ?**

θ n'intervient que par son cosinus ; pour θ faible, on peut écrire $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et donc :

$$z_2 = \frac{z_1}{1 - 2\frac{z_1}{R} + \frac{z_1}{R}\theta^2} \approx \frac{z_1}{1 - 2\frac{z_1}{R}}$$

Dans la suite, on considérera qu'il y a **stigmatisme approché** si les rayons lumineux sont faiblement inclinés sur l'axe optique : **c'est la condition d'approximation de Gauss.**

Exercice 2.1 : Montrer, en utilisant la figure sur contre, que la quantité $\frac{nCA}{IA}$ est un invariant du dioptré lorsqu'on passe de l'espace objet à l'espace image.



Exercice 2.2 : stigmatisme rigoureux du miroir plan.

calculer le chemin optique entre un point objet A_1 et son point image A_2 par rapport à un miroir plan. En déduire que la condition de stigmatisme rigoureux est toujours réalisée pour un miroir plan.

Exercice 2.3 : Points de Weierstrass.

On considère un dioptré sphérique séparant un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2 . le centre C du dioptré est dans le milieu d'indice n_1 et on note S son sommet. Son rayon de courbure est $R = \overline{SC}$. Soit A_1 tel que $p = \overline{SA_1}$, un point du milieu objet, situé sur l'axe principal et A_1I , le rayon incident rencontrant le dioptré en I . le rayon réfracté coupe l'axe optique en un point A_2 tel que $p' = \overline{SA_2}$. Calculer les points (dit de Weierstrass) qui réalisent le stigmatisme rigoureux du dioptré sphérique.

Exercice 2.4 : Aplanétisme.

1. Que devient la formule des sinus d'Abbe pour un système aplanétique, lorsque l'on se met dans les conditions de Gauss ?
2. Que donne la formule des sinus d'Abbe, si l'objet AB est rejeté à l'infini (on fera le calcul pour les rayons limités par la pupille d'entrée de rayon R du système optique) ?

Exercice 2.5 : Stigmatisme approché d'un miroir sphérique.

Soit un miroir sphérique de centre C et de rayon R et soit un point source A_1 sur l'axe optique du système tel que $\overline{CA_1} = r_1$. Un rayon issu de A_1 se réfléchit en I sur le miroir. Le rayon réfléchi rencontre de nouveau l'axe optique en A_2 . on donne $\overline{CA_2} = r_2$ et l'angle $(CS, CI) = \alpha$.

1. Calculer le chemin optique L entre A_1 et A_2 en fonction de α , r_1 et r_2 .
2. donner une expression approchée de L lorsque les points A_1 et A_2 sont proches du centre C du miroir ($|r_{1,2}| \ll R$). En déduire que le miroir sphérique présente un stigmatisme approché pour des points symétriques par rapport à C et au voisinage de C .