Université de Provence - Centre de Télé-Enseignement
Mécanique
L1

Mécanique du point – Devoir n°1

1 Problème (/14)

Un point matériel décrit une courbe **plane** (schéma joint) dont l'équation paramétrique **en coordonnées polaires** est:

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1+\cos at) \text{ et } \phi = at$$

où ρ_0 et a sont des constantes positives.

1 - Tracer sur le schéma les vecteurs $\widehat{\rho}$ et $\widehat{\phi}$ de la base polaire au point M. Indiquer sur le schéma les grandeurs ρ, ϕ et ρ_0. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base polaire.

2 - Tracer sur le même schéma les vecteurs $\widehat{\tau}$ et $\widehat{n}$ de la base intrinsèque au point M. L'origine des abscisses curvilignes $s(t)$ est en M_0=M($t=0$), et le sens positif choisi est celui indiqué sur le schéma.

3 - Donner les expressions, **dans le cas général**, de la vitesse $\overrightarrow{V}$ et de l'accélération $\overrightarrow{a}$ dans la base polaire.

4 - Déterminer l'expression de $\overrightarrow{V}$ **dans le cas du mouvement considéré** ainsi que celle de $\|\overrightarrow{V}\|$. On se limite pour ϕ à l'intervalle $[0,\pi[$.

On rappelle les relations:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

5 - Comparer $v = \dfrac{ds}{dt}$ et $\|\overrightarrow{V}\|$. En déduire l'expression de $s(t)$.

6 - Déterminer l'expression de $\overrightarrow{a}$ **dans le cas du mouvement considéré**. Montrer que:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \frac{1}{2}\rho_0 a^2\sqrt{\left(1+8\cos^2\left(\frac{at}{2}\right)\right)}$$

7 - Donner les valeurs des composantes de $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{a}$ dans la base polaire au point M_0. Tracer, au point M_0, $\widehat{\rho}$, $\widehat{\phi}$, $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{a}$. Mêmes questions pour le point M_1.

Echelles à adopter: pour $\overrightarrow{V}$, $\rho_0 a \longleftrightarrow$ 6 cm; pour $\overrightarrow{a}$, $\rho_0 a^2 \longleftrightarrow$ 3.3 cm.

8 - Donner, **dans le cas général**, l'expression de $\overrightarrow{a}$ dans la base intrinsèque. En déduire $\|\overrightarrow{a}\|$ dans le cas particulier du problème.

9 - Déduire des questions précédentes l'expression du rayon de courbure R.

2 Exercice (/3)

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel fixe, et $\mathcal{R}_1$ un référentiel mobile. $\mathcal{R}_1$ est en **en translation circulaire** par rapport à $\mathcal{R}$. On associe à $\mathcal{R}$ un repère (O, $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{z}$); on associe à $\mathcal{R}_1$ un repère (O_1, $\widehat{x_1}$, $\widehat{y_1}$, $\widehat{z_1}$). O_1 appartient au plan xOy, et a un mouvement circulaire uniforme autour de O de vitesse angulaire ω_1 et de rayon R_1. A tout moment $\widehat{x_1}$=$\widehat{x}$, $\widehat{y_1}$=$\widehat{y}$, et $\widehat{z_1}$=$\widehat{z}$.

Un point M, appartenant également au plan xOy, a un mouvement circulaire uniforme autour de O_1, de vitesse angulaire $\omega = 2\omega_1$ et de rayon r. Les points O_1 et M tournent dans le sens indirect (sens contraire au sens trigonométrique), comme indiqué sur le schéma.

Les trajectoires dans $\mathcal{R}$, de O_1 et de M sont tracées sur le schéma joint. Les positions de O_1 et de M sont données au temps $t = 0$.

1 - Connaissant la position de O_1 au temps t (donnée sur le schéma), indiquer sur le schéma la position correspondante de M.

2 - Représenter sur le schéma la vitesse du point O_1 dans $\mathcal{R}$ à t.

3 - Représenter sur le schéma la vitesse relative, la vitesse d'entrainement, et la vitesse absolue du point M au temps t.

3 Question de cours (/3)

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel considéré comme fixe, et $\mathcal{R}_1$ un référentiel mobile par rapport à $\mathcal{R}$. On associe à $\mathcal{R}$ le repère (O, $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{z}$), et à $\mathcal{R}_1$ le repère (O_1, $\widehat{x_1}$, $\widehat{y_1}$, $\widehat{z_1}$). Soit $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur rotation instantanée de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$.

1 - Définir les termes vitesse absolue, vitesse relative, et vitesse d'entrainement d'un point M.

2 - A l'aide des opérateurs dérivation par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}_1$, démontrer la loi de composition des vitesses.

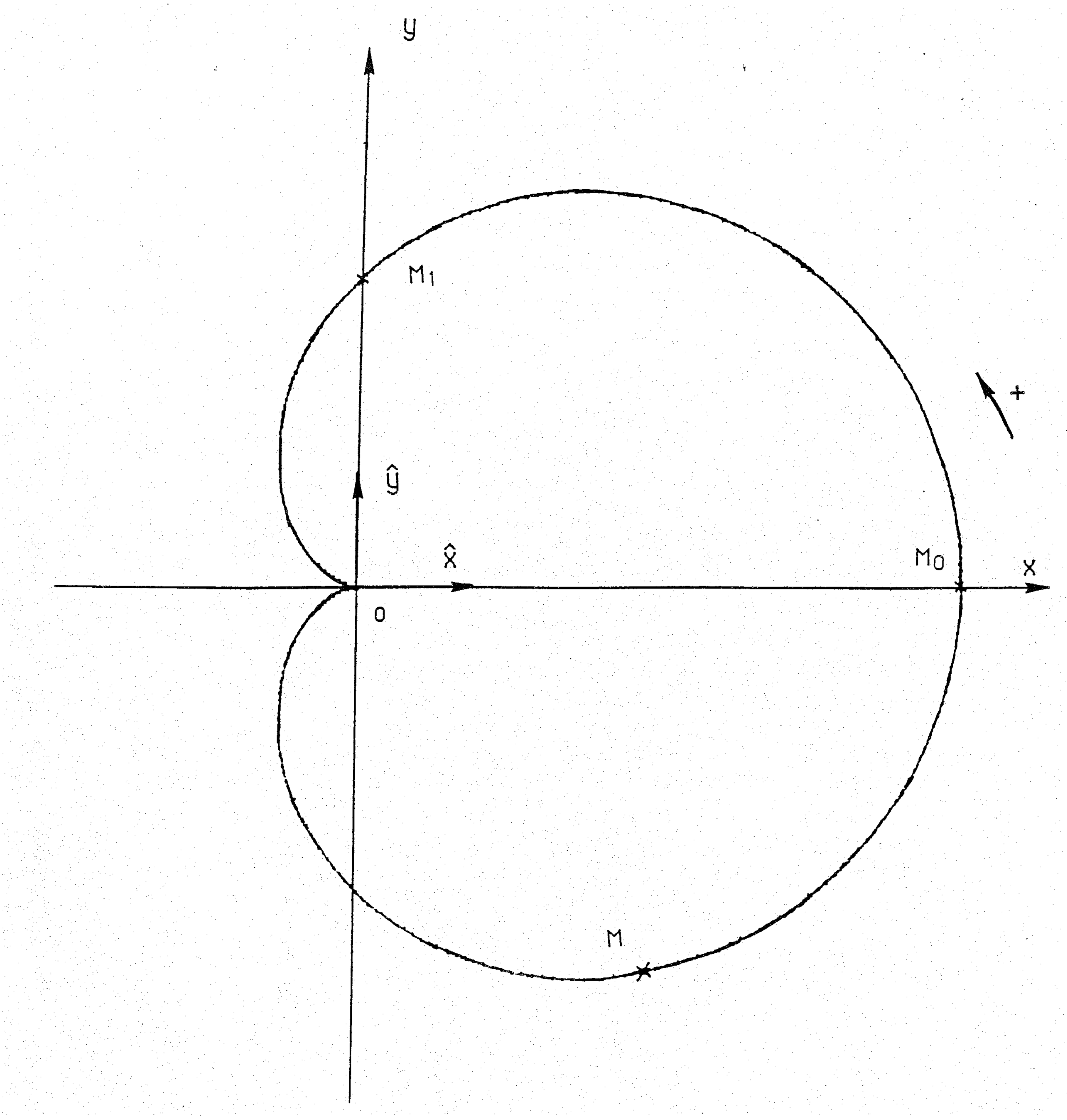

Figure 1: Schéma du problème

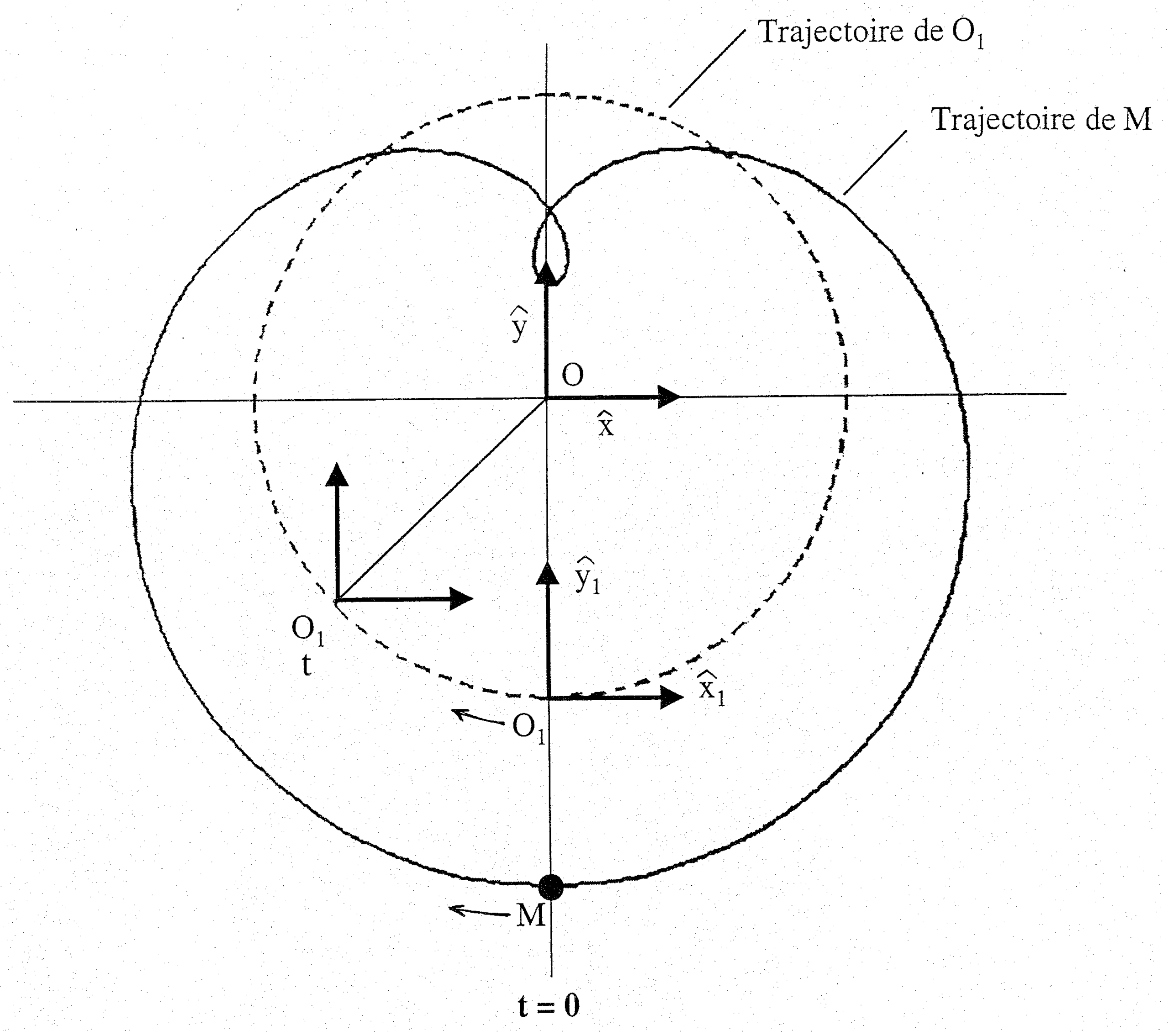

Figure 2: Schéma de l'exercice