1.5) Ascenseur lunaire

Rien ne s'oppose, en principe, à ce que le câble ne soit ancré à la surface même de la Lune ! Cette dernière tourne toujours la même face vers la Terre, aux mouvements de libration près, lesquels représentent une amplitude de 7° en longitude et en latitude, avec une périodicité de 27 jours. Ce balancement se traduit par un déplacement qui s'effectue à la vitesse de 20 cm/sec à la surface de la Lune.

L'extrémité du câble se situerait à une distance de la surface de la Terre variant de 0, au périgée, à 22460 km à l'apogée. Sa vitesse de déplacement, par rapport à la surface de la Terre serait de 460 m/sec, au périgée. On peut concevoir qu'un avion de type "super-Concorde" serait à même de rallier, en trajectoire balistique, le terminal situé à l'extrémité du câble, aux limites de l'atmosphère, le voyage se terminant en ascenseur magnétique.

Pour calculer les efforts s'exerçant en chaque section du câble, il y a lieu de tenir compte de l'attraction de la Lune qui se retranche de celle de la Terre et devient prépondérante dans le voisinage de la Lune.

Rappelons, tout d'abord, les valeurs des paramètres suivants :

- masse de la lune : $7{,}336.10^{22}$ kg
- rayon de la Lune : $1{,}738.10^{6}$ m
- demi grand axe de l'orbite lunaire : $390{,}871.10^{6}$ m
- vitesse angulaire de révolution de la Lune : $2{,}658.10^{-6}$ rad/sec

Pour une charge C_{utile} accrochée à l'extrémité du câble (par exemple, le terminal) et une charge répartie avec la densité linéaire k, la section S(r) du câble, à la distance r de la surface de la Lune, est donnée par l'expression :

$$S(r) = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\rho C_{utile}}{C_{oeff}\,\sigma} + k\right) e^{\frac{\rho}{C_{oeff}\,\sigma}(A(r)+B(r)+C(r))} - k \right]$$

avec les définitions suivantes :

$$A(r) = \frac{GM_T}{R_T} - \frac{GM_T}{R_T + a_L - r} - \frac{GM_L}{a_L} + \frac{GM_L}{a_L - r + R_L}$$

$$B(r) = \Omega_L{}^2 (R_T + a_L) r - \Omega_L{}^2 (R_T + a_L) a_L$$

$$C(r) = \frac{\Omega_L{}^2 a_L{}^2}{2} - \frac{\Omega_L{}^2 r^2}{2}$$

Tandis que la masse du câble est donnée par l'expression :

$$\mu = \rho \int_0^{a_L} S(r)dr + ka_L$$

Rappelons que, dans ces expressions, les différents symboles ont les significations suivantes :

- M_T est la masse de la Terre.
- M_L est la masse de la Lune.
- G est la constante de la gravitation
- Ω_L est la vitesse angulaire orbitale de la Lune.
- a_L est le demi grand axe de l'orbite lunaire.
- ρ est la densité du câble.
- σ est la résistance du câble à la rupture en traction
- C_{oeff} est un coefficient de sécurité (on a pris C_{oeff} = 0,5 : le câble peut résister à un effort double de celui qui est effectivement appliqué).

Pour une charge utile de 100 tonnes et une charge répartie de 100 kg/m, on trouve, dans le cas des nanotubes de carbone, une masse de câble égale à 1,621 milliards de tonnes, une section maximum de câble (à la surface de la Lune) égale à 3,102 m^2. En outre, l'effort exercé par le câble, à la surface de la Lune, est de sept millions de tonnes. L'ancrage, à la surface de la Lune, doit être réalisé par l'intermédiaire d'une rotule autorisant, dans toutes les directions, un débattement de 7° correspondant aux mouvements de libration.

1.6 Èquations des oscillations d'un câble .

Bien que la traction exercée par la gravité de la Terre et la force centrifuge créent l'effort le plus important supporté par un câble orbital, on ne doit pas oublier que l'attraction du Soleil ou celle de la Lune, dans le cas d'un câble en orbite dans le voisinage de la Terre constituent des forces s'exerçant périodiquement dans une direction perpendiculaire à celle du câble et de nature à le faire osciller. Nous écrirons les équations des oscillations d'un câble relativement au système d'axes précédemment définis et accompagnant le câble dans sa rotation. Rappelons que ces axes sont reliés aux axes "absolus" x,y,z issus du centre de la Terre par les expressions :

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_X \\ \vec{e}_Y \end{bmatrix}$$

ω représente la vitesse de rotation du câble. Les mouvements du câble sont définis par les trois coordonnées η, θ, ζ, d'un point du câble dans le systèmes d'axes considérés (ζ est orthogonal aux deux autres axes et demeure parallèle à l'axe z). Ces trois quantités sont des fonctions de l'abscisse, r, le long du câble et du temps. On désigne, en outre, par $x_0(t)$, $y_0(t)$ et $z_0(t)$ les coordonnées du point d'encrage du câble par rapport aux axes absolus. Ces coordonnées sont trois fonctions du temps qui décrivent le mouvement orbital du point d'encrage du câble dans le champ de gravitation combiné de la Terre, de la Lune et du Soleil. Par rapport aux axes x,y,z, le mouvement résultant du câble s'écrit :

$$\begin{aligned} x(r,t) &= x_0(t) + \eta(r,t)\cos\omega t - \theta(r,t)\sin\omega t + r\cos\omega t \\ y(r,t) &= y_0(t) + \eta(r,t)\sin\omega t + \theta(r,t)\cos\omega t + r\sin\omega t \\ z(r,t) &= z_0(t) + \zeta(r,t) \end{aligned}$$

la vitesse d'un point du câble, dans les axes x,y,z s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \dot{x}(r,t) &= \dot{x}_0(t) - \omega\eta(r,t)\sin\omega t + \dot{\eta}(r,t)\cos\omega t - \omega\theta(r,t)\cos\omega t - \dot{\theta}(r,t)\sin\omega t - r\omega\sin\omega t \\ \dot{y}(r,t) &= \dot{y}_0(t) + \omega\eta(r,t)\cos\omega t + \dot{\eta}(r,t)\sin\omega t - \omega\theta(r,t)\sin\omega t + \dot{\theta}(r,t)\cos\omega t + r\omega\cos\omega t \\ \dot{z}(r,t) &= \dot{z}_0(t) + \dot{\zeta}(r,t) \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la vitesse dans les axes η, θ, soit :

$$\vec{V} = (\cos\omega t\dot{x}_0(t) + \sin\omega t\dot{y}_0(t) + \dot{\eta}(r,t) - \omega\theta(r,t))\vec{e}_\eta + (-\sin\omega t\dot{x}_0(t) + \cos\omega t\dot{y}_0(t) + \omega\eta(r,t) + r\omega + \dot{\theta}(r,t))\vec{e}_\theta + \dot{z}_0(t)\vec{e}_\zeta$$

puis l'accélération :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} = {} & (\cos\omega t\ddot{x}_0(t) + \sin\omega t\ddot{y}_0(t) - \omega\sin\omega t\dot{x}_0(t) + \omega\cos\omega t\dot{y}_0(t) + \ddot{\eta} - \omega\dot{\theta})\vec{e}_\eta + (\cos\omega t\dot{x}_0(t) + \sin\omega t\dot{y}_0(t) + \dot{\eta} - \omega\theta)\dot{\vec{e}}_\eta \\ & + (-\sin\omega t\ddot{x}_0(t) + \cos\omega t\ddot{y}_0(t) - \omega\cos\omega t\dot{x}_0(t) - \omega\sin\omega t\dot{y}_0(t) + \omega\dot{\eta} + \ddot{\theta})\vec{e}_\theta + (-\sin\omega t\dot{x}_0(t) + \cos\omega t\dot{y}_0(t) + \omega\eta + \omega r + \dot{\theta})\dot{\vec{e}}_\theta \\ & + \ddot{z}_0(t)\vec{e}_\zeta \end{aligned}$$

compte tenu des relations : $\dot{\vec{e}}_\eta = \omega\vec{e}_\theta$ et $\dot{\vec{e}}_\theta = -\omega\vec{e}_\eta$ on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \gamma_\eta &= \cos\omega t\ddot{x}_0(t) + \sin\omega t\ddot{y}_0(t) + \ddot{\eta}(r,t) - 2\omega\dot{\theta}(r,t) - \omega^2\eta(r,t) - \omega^2 r \\ \gamma_\theta &= -\sin\omega t\ddot{x}_0(t) + \cos\omega t\ddot{y}_0(t) + 2\omega\dot{\eta}(r,t) + \ddot{\theta} - \omega^2\theta(r,t) \\ \gamma_\zeta &= \ddot{z}_0(t) + \ddot{\zeta}(r,t) \end{aligned}$$

On suppose, par ailleurs, que le câble ne peut transmettre des efforts que dans sa direction : le câble est parfaitement flexible. La force, qui s'exerce à travers une section quelconque du câble, lui est donc tangente, d'où :

$$\vec{F}(r,t) = f(r,t)\vec{u}(r,t)$$

f(r,t) est l'intensité de la force de liaison considérée, tandis que le vecteur tangent au câble a, pour composantes : $1+\partial_r\eta(r,t)$, $\partial_r\theta(r,t)$, $\partial_r\zeta(r,t)$.

Cela posé, la déformation, en un point d'abscisse r, dans la direction du câble, a pour expression :

$$\Delta(r,t)dr = (1+\partial_r \eta(r,t))^2 + \partial_r \theta(r,t)^2 + \partial_r \zeta(r,t)^2)^{1/2} dr - dr$$

de sorte que l'allongement relatif d'un élément de câble, au voisinage du point considéré, vaut : $\Delta(r,t)$. Il en résulte une force de rappel élastique donnée par : $\Delta(r,t)S(r)E$, expression dans laquelle S(r) désigne la section du câble et, E, son module d'élasticité. On a, par suite, la relation :

$$\Delta(r,t) = \frac{f(r,t)}{S(r)E}$$

si le câble est parfaitement rigide dans le sens de la longueur, cela entraîne que l'allongement dans la direction du câble doit être nul en tout point. Pour un câble élastique, la densité de force élastique par unité de volume est donnée par :

$$\partial_r (\Delta(r,t)S(r)\vec{u}(r,t))E$$

Les quatre équations décrivant les mouvements d'oscillation du câble prennent donc la forme :

$$\partial_r (f(r,t)\vec{u}(r,t)) + \vec{G}(r,t)\rho S(r) - \vec{\gamma}(r,t)\rho S(r) = 0$$

$$\Delta(r,t) = \frac{f(r,t)}{S(r)E}$$

Dans ces expressions, G(r,t) désigne la force due à la gravitation, projetée dans les axes du système en rotation, ρ désigne la densité du câble et, S(r), sa section. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles, du second ordre, de type hyperbolique par rapport au temps. Elles sont non linéaires car la force qui s'exerce à travers une section du câble dépend du produit des composantes du déplacement du câble par leurs dérivées. Cependant, si l'on admet que les déplacements du câble sont petits par rapport à sa longueur, hypothèse généralement vérifiée, on a : $\Delta(r,t) \sim 1+\partial_r\eta$. Les équations sont alors linéaires si l'on admet que la section du câble est une donnée du problème. En fait, cette dernière doit être déterminée, comme au paragraphe 1.3 ci-dessus pour assurer la résistance mécanique du câble.