Devoir à rendre Lif11

M.MOREAU Damien 10909236

Le 1 décembre 2011

Chapitre 1

La Barre De Sheffer

La barre de Sheffer est un connecteur logique binaire, noté avec le symbole $|$.
Sa fonction booléenne associée $f_|$ est donnée par la table suivante :

X	Y	$f_\vert(x,y)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

1.1 Propriétés du connecteur | :

- expression logique équivalente a (A|B) construite avec les connecteurs donnés en cours est :

$$\neg(A \wedge B) = \neg(A) \vee \neg(B)$$

En effet, si on décompose les différentes étape dans un tableau on obtient :

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

- Pour chacune des affirmations suivantes, donner une démonstration ou un contre-exemple :

  · La barre de Sheffer est associative :

  Faux, la Barre de Sheffer n'est pas associative

  Contre-exemple : Soit A,BC des variables proposionnelles montrons que (A/B)/C $\neq$ A/(B/C)

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	A|B	B|C	(A|B)|C	A|(B|C)
V	V	V	F	F	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

$\square$

  · La barre de Sheffer est commutative :

  Vrai, La Barre de Sheffer est commutative :

  Démonstration :
  Soient A,B deux variabes propositionnelles. Montrons que (A/B)=(B/A)

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(B \wedge A)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V

$\square$

- Montrer que la barre de Sheffer constitue à elle seule un ensemble de connecteurs fonctionnellement complet :

<u>Démonstration :</u>
Pour démontrer qu'un ensemble de connecteurs est un ensemble de connecteurs fonctionnellement complet il faut à partir des connecteurs de cette ensemble en déduire tout les connecteurs logiques ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *). Soit A,B des variables propositionnelles. On obtient respectivement* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *par les assertions suivante :*

- $\star$ $(A|A)$
- $\star$ $(A|B)|(A|B)$
- $\star$ $(A|A)|(B|B)$
- $\star$ $A|(B|B)$
- $\star$ $[(A|(B|B))|(B|(A|A))]|[(A|(B|B))|(B|(A|A))]$

$\square$

1.2 Calcul de séquents pour | :

- Donner deux nouvelles règle pour la barre de Sheffer.

Les deux nouvelles règles peuvent être les suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma, (A|B) \vdash \Delta}(|_G)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, (A|B)}(|_D)$$

- Montrer la correction de ces règles.

<u>Démonstration :</u>Pour démontrer qu'un séquent est correct il suffit de partir d'un des séquent de départ et de remonter jusqu'à l'autre séquent en utilisant les règles par exemple du Système G.

Règle à gauche ($|_G$) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}(\wedge_D)}{\Gamma, \neg(A \wedge B) \vdash \Delta}(\neg_G)}{\Gamma, (A|B) \vdash \Delta}((A|B) \equiv \neg(A \wedge B))$$

Règle à droite ($|_D$) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}(\wedge_G)}{\Gamma \vdash \Delta, \neg(A \wedge B)}(\neg_D)}{\Gamma \vdash \Delta, (A|B)}((A|B) \equiv \neg(A \wedge B))$$

□

- Montrer que le système composé de la règle (Axiome) et des deux règles proposées au dessus est correct et complet pour des séquents composés de formules construites uniquement en utilisant des variables propositionnelles et la barre de Sheffer.

<u>Démonstration :</u> *Nous avons montrez que les règles ($|_G$) et ($|_D$) sont des règles corrects. De plus l'axiome est une règle correct donc le Système muni de ses 3 règles est correct. Il ne reste plus qu'à démontrer que le système est complet. Pour cela nous allons montrer que toutes les règles du Système G peuvent être remplacé par les règles du système composé de ses trois règles. Et comme le Système G est complet alors le système composé des trois règles sera complet .*

La règle ($\neg_D$) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A, A \vdash \Delta}(Axiome)}{\Gamma \vdash \Delta, (A|A)}(|_D)}{\Gamma \vdash \Delta, \neg(A)}((A|A) \equiv \neg(A))$$

La règle $(\Rightarrow_G)$:

$$
\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, B, B \vdash \Delta}(Axiome)}{\Gamma \vdash (B|B)\Delta}(Axiome)}{\dfrac{\Gamma, A|(B|B) \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}((A|A) \equiv \neg(A))}(|_D)
$$