TD 4 : Problèmes de plus court chemin (suite et fin)

Exercice 1

Montrer que, quel que soit un graphe orienté, et quels que soient les trois sommets $x, y, z \in V$ de ce graphe, la matrice suivante :

	x	y	z
x	0	10	10
y	20	0	20
z	10	30	0

ne peut pas être la matrice des plus courtes distances entre ces trois sommets.

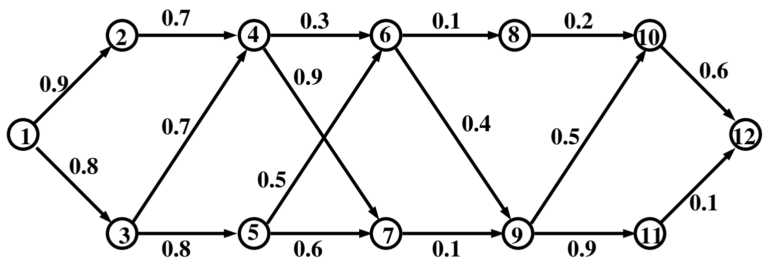
Exercice 2

Proposer un algorithme pour le problème suivant :
Entrée : la matrice $P = (p_{ij})$ des distances entre tous les sommets, et deux sommets x_i et x_j.
Sortie : un plus court chemin de x_i à x_j (un chemin dont la longueur est effectivement p_{ij}).

Exercice 3

Michel Strogoff, le héros du roman de même non de Jules Verne, doit se rendre de Moscou à Irkoutsk, sur le lac Baïkal. En chemin, il peut faire halte dans les villes suivantes : (1) Moscou, (2) Kazan, (3) Penza, (4) Perm, (5) Oufa, (6) Tobolsk, (7) Novo-Saimsk, (8) Tara, (9) Omsk, (10) Tomsk, (11) Semipalatinsk, (12) Irkoutsk. (Il n'est pas obligé de passer par toutes ces villes).

Après avoir consulté une voyante, Michel Strogoff estime ses chances de passer d'une ville à l'autre sans entraves comme dans la figure suivante :



1. Ignorant le calcul des probabilités, Michel Strogoff avait décidé de maximiser la somme globale des chances. Déterminer l'itinéraire qu'il avait choisi.
2. Quelle était alors la véritable probabilité de réussir ?
3. Quel aurait été l'itinéraire de Michel Strogoff s'il avait connu les principes du calcul des probabilités, et quelle aurait été la probabilité de réussir ?

Exercice 4

Supposons que le poids d'un chemin est calculé comme le *produit* des poids des arcs composants ce chemin (et non plus comme leur somme, comme c'était le cas dans les algorithmes de calcul des plus courts chemins). Au lieu de chercher un plus court chemin on cherche un chemin de poids minimum.

1. Pour justifier la solution de l'exercice précédent, nous avons besoin de la proposition suivante :

   > Proposition. L'algorithme de Bellman-Ford appliqué aux produits au lieu des sommes donne le chemin de poids minimum.

   En fait, il manque une condition dans cette proposition. Ajouter la condition manquante et démontrer la proposition.
2. Montrer à l'aide d'un exemple que sans cette condition la proposition devient fausse.
3. Montrer à l'aide d'un exemple que l'algorithme de Dijkstra appliqué à la recherche d'un chemin de poids minimum peut donner un résultat incorrect, même si tous les poids sont positifs et que le graphe est sans circuit.
4. Quelle condition faut-il ajouter pour que l'algorithme de Dijkstra marche correctement dans la situation des produits des poids ?