## Equation à résoudre

Le but de l’exercice est de résoudre l’équation (\*) suivante :

$a \frac{d²u}{dx²}+b \frac{du}{dx}+c u=0$ pour $x ϵ [0 , L]$

Les conditions de bord sont : u(0) = U0 et u(L) = UL.

## Schéma numérique

Soit N $ϵ$ N fixé. On définit les points de discrétisation du maillage par :

xi = ih, i $ϵ$ {0,1,2,…,N+1} où h = $\frac{L}{N+1}$ .

On cherche en chacun des points x1, x2, …, xN une valeur approchée, notée ui, de u(xi).

On prend naturellement u0 =u(0) = U0 et uN+1 = u(L) = UL.

On remplace chacune des dérivées en xi par les approximations suivantes :

$$\frac{d²u}{dx²} \left(xi\right)= \frac{u i+1-2 u i+u i-1}{h²}$$

$$\frac{du}{dx} \left(xi\right)= \frac{u i+1-u i}{h} $$

L’équation (\*) peut donc être réécrite sous forme d’un système (\*) de N équations pour chaque i$ ϵ${1,2,…,N} :

$$\left(\frac{a}{h^{2}}+\frac{b}{h}\right)ui+1+\left(c-\frac{2a}{h^{2}}-\frac{b}{h}\right)ui+ \frac{a}{h²} ui-1=0$$

## Représentation matricielle

Posons : U = $\left[\begin{matrix}u1\\u2\\\vdots \\uN\end{matrix}\right] ;e= \frac{a}{h^{2}}+\frac{b}{h} ;f= c-\frac{2a}{h^{2}}-\frac{b}{h} ;g= \frac{a}{h^{2}} .$

Matriciellement, ce système d’équations s’écrit :

A\*U = B avec :

A = $\left[\begin{matrix}e&f&0&…&0\\g&e&f&\ddots &\vdots \\0&\ddots &\ddots &\ddots &0\\\vdots &\ddots &g&e&f\\0&…&0&g&e\end{matrix}\right]$ et B = $\left[\begin{matrix}-g u(0)\\0\\\vdots \\0\\- e u(L)\end{matrix}\right]$