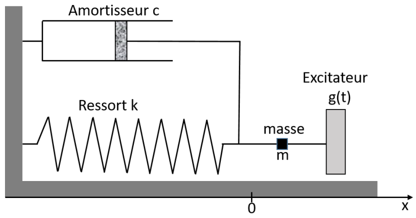
Projet LU2ME003 : étude d'un système masse-ressort-amortisseur. Application à l'étude de la tour de Taipei

Le projet est à réaliser en autonomie (18 mars-7 avril). Une évaluation en ligne (environ 30 min) sera organisée le 7 avril en soirée. Pour cela vous devrez avoir terminé la programmation. On vous demandera d'utiliser vos programmes pour répondre à des questions individualisées, et de déposer les programmes modifiés sur Moodle. Pour la compilation et l'exécution de vos programmes (en C ou Fortran), vous pouvez utiliser la plateforme repl.it.

On considère un système masse-ressort-amortisseur, où $x(t)$ est le déplacement de la masse m par rapport à sa position d'équilibre, k la raideur du ressort et c le coefficient d'amortissement. On suppose que le système est soumis à une excitation $g(t)$ donnée (figure). Initialement, la masse est en position $x(0) = x_0$, et sa vitesse est $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = v_0$.



Les données (modifiables) de vos programmes doivent être les valeurs de : m, k, c, $g(t)$, x_0, v_0, la durée t_{max} de l'étude. L'inconnue est la position $x(t)$.
Le système est gouverné par l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{g(t)}{m} \tag{1}$$

Pour la résolution numérique, on met le problème sous la forme du système suivant (deux EDO d'ordre 1) : $\frac{dU}{dt} = f(t, U)$ où le vecteur $U(t)$ a deux composantes, $U = (x, v)$.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v & (2)\\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}v + \frac{g(t)}{m} & (3)\end{aligned}\right.$$

Pour chacun des cas suivants (voir tableau ci-dessous), on demande de :

(a) Trouver la solution analytique $x_{an}(t)$ de (1) pour $0 \le t \le t_{max}$, en distinguant les cas selon le signe de $\delta = (c/m)^2 - 4k/m$ (positif, négatif ou nul).

(b) Soit n_{max} fixé. On définit le pas de temps $\Delta t = t_{max}/n_{max}$ et le maillage $t_n = n\Delta t$, pour $0 \le n \le n_{max}$. On note $x_n \approx x(t_n)$ et $v_n \approx v(t_n)$ la solution numérique approchée.
Résoudre le système (2)(3) par la méthode d'Euler, une méthode RK2 (au choix) et la méthode RK4 pour obtenir les valeurs de x_n.

(c) Tracer la position de la masse au cours du temps en superposant les solutions analytique et numérique.

(d) Effectuer une étude de convergence en maillage et tracer l'erreur (échelle log-log) entre les solutions analytique et numérique $x_{an}(t_{max})$ et $x_{n_{max}}$ pour différents pas de temps.

cas	m (kg)	k (N.m^{-1})	c (kg.s^{-1})	x_0 (m)	v_0 (m.s^{-1})	$g(t)$
1	1.0	20.5	1.0	1.0	0	0
2	1.0	1.0	2.0	1.0	1.	0
3	1.0	4.75	10.	1.0	0	0
4	1.0	20.5	1.0	1.	0	$\sin(2t)$

Pour les cas (1,2,3) prendre $t_{max} = 10$ s (maillage le plus grossier $n_{max} = 500$).
Pour le cas (4), prendre $t_{max} = 20$ s (maillage le plus grossier $n_{max} = 1000$).

Application (cas 5, avec des questions spécifiques) :

La Tour Taipei 101, inaugurée en 2004 est un des plus hauts gratte-ciels du monde (508 m de haut). Cette tour d'environ 700 000 tonnes, parfois décrite comme «un majestueux bambou bleu», a été conçue pour résister à des vents soufflant à 200 km/h et à un tremblement de terre de niveau 7 sur l'échelle de Richter. Lors de vents très violents le dernier étage peut se déplacer jusqu'à plus ou moins 3 m. La tour de 101 étages a été équipée d'une boule d'acier de 660 tonnes suspendue au 92e étage de la tour. La sphère peut se déplacer de plus ou moins 1.5 mètre maximum et permet d'amortir 30 à 40% des mouvements de l'édifice.

La tour sans la boule est assimilée à une poutre encastrée dans le sol et sollicitée en flexion : on peut montrer que pour de petits déplacements elle a un comportement proche d'un ressort de raideur k_1. On note m_1 la masse équivalente du bâtiment et x_1 le déplacement transversal du sommet de la tour. La boule d'acier est modélisée comme une masse m_2 liée au sommet de la tour par un ressort de raideur k_2 en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement visqueux c. Les données sont $m_1 = 264 \times 10^6$ kg, $k_1 = 225 \times 10^6$ N.m^{-1}, $m_2 = 660 \times 10^3$ kg , $k_2 = 510 \times 10^3$ N.m^{-1} et $c = 52 \times 10^3$ kg.s^{-1}.

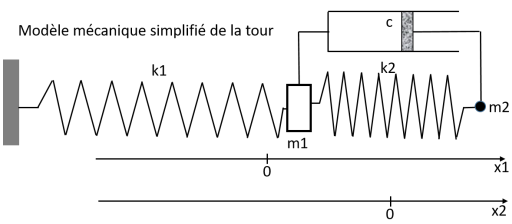
Les déplacements x_1 et x_2 sont alors liés au déplacement initial x_0 par le système constitué des deux équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

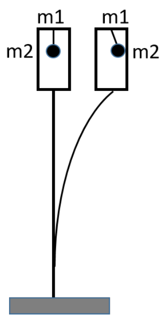
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \dfrac{k_1}{m_1}x_1(t) + \dfrac{k_2}{m_1}(x_1(t) - x_2(t)) = 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} - \dfrac{k_2}{m_2}(x_1(t) - x_2(t)) + \dfrac{c}{m_2}\left(\dfrac{dx_2}{dt} - \dfrac{dx_1}{dt}\right) = 0 \end{array}\right.$$

Pour la résolution numérique, on met le problème sous la forme du système suivant $\frac{dU}{dt} = f(t, U)$ où le vecteur a 4 composantes, $U(t) = (x_1, x_2, v_1, v_2)$.

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx_1}{dt} & = v_1 \qquad (4) \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = v_2 \qquad (5) \\ \dfrac{dv_1}{dt} & = -\dfrac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 + \dfrac{k_2}{m_1}x_2 \qquad (6) \\ \dfrac{dv_2}{dt} & = \dfrac{k_2}{m_2}x_1 - \dfrac{k_2}{m_2}x_2 + \dfrac{c}{m_2}v_1 - \dfrac{c}{m_2}v_2 \qquad (7) \end{array}\right.$$

Travail à réaliser : On modélise une bourrasque de vent par un déplacement initial du sommet de la tour $x_1(0) = x_0$ avec une vitesse nulle $v_1(0) = 0$ (et pour la sphère $x_2(0) = 0$, $v_2(0) = 0$). On prend $x_0 = 0.25$ m. On veut déterminer les déplacements du sommet de la tour et de la sphère au cours du temps.
On prend $t_{max} = 240$ s (4 min) et 3 valeurs du pas de temps fixées par $n_{max} = 2000,\ 20000,\ 200000$.
Résoudre le système (4)(5)(6)(7) par les méthodes d'Euler et RK4 et tracer $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
Traiter le cas $x_0 = 3$ m et conclure sur le modèle d'amortissement mis en place ici.





Conseils de programmation

Les remarques/suggestions suivantes sont uniquement indicatives. Vous êtes libres d'organiser votre travail à votre guise.

1. La fonction $f(t,U)$ est une fonction vectorielle.
   Cas 1,2,3 (EDO homogène). La fonction $f(t,U)$ est seulement fonction de U. Si on note $U=(u_1,u_2)$ on a :
   $$\left\{\begin{array}{ll} f_1 & = u_2 \\ f_2 & = -\frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2 \end{array}\right.$$
   Cas 4 (EDO inhomogène). La fonction $f(t,U)$ est :
   $$\left\{\begin{array}{ll} f_1 & = u_2 \\ f_2 & = -\frac{k}{m}u_1 - \frac{c}{m}u_2 + \frac{g(t)}{m} \end{array}\right.$$
   Cas 5 (tour Taipei). La fonction $f(t,U)$ est seulement fonction de U. Si on note $U = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ on a :
   $$\left\{\begin{array}{ll} f_1 & = u_3 \\ f_2 & = u_4 \\ f_3 & = -\dfrac{(k_1+k_2)}{m_1}u_1 + \dfrac{k_2}{m_1}u_2 \\ f_4 & = \dfrac{k_2}{m_2}u_1 - \dfrac{k_2}{m_2}u_2 + \dfrac{c}{m_2}u_3 - \dfrac{c}{m_2}u_4 \end{array}\right.$$
2. Pour répondre aux questions posées, il n'est pas nécessaire de conserver en mémoire l'évolution du vecteur U (à chaque pas, le nouveau vecteur U peut "écraser" le vecteur du pas précédent).
3. Traitement des données modifiables (m, k, c, ...) : on peut par exemple les insérer dans un fichier texte et ouvrir (pour lecture) ce fichier puis attribuer les valeurs lues aux valeurs des paramètres du code. Ceci permet d'éviter de recompiler le code à chaque changement de paramètre modifiable. On peut également introduire un paramètre de type "cas" (qui prend les valeurs 1 à 4 ou 5), ce qui est possible/facile à faire dans les 2 langages de programmation. Il est cependant recommandé de ne faire cela qu'après avoir bien mis au point toutes les parties des programmes.
4. Pour la tour Taipei, attention à ne pas utiliser le même nom pour les raideurs k_1,k_2 et les variables intermédiaires des méthodes RK (dans le cours on a utilisé k_1, k_2, k_3....).