E.S.I.M. 1993, option M&P', Mathématiques I

1. a. $\operatorname{th} z$ existe si et seulement si $e^z + e^{-z} \neq 0$. Or $e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 = e^{i\pi}$ ce qui équivaut à $2z = \pi + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
Donc $\underline{\operatorname{th} z \text{ existe si et seulement si } z \notin \left\{ i\frac{\pi}{2} + ik\pi \;\middle|\; k \in \mathbf{Z} \right\}}$.

b. $\operatorname{th} z = 0 \Longleftrightarrow e^{2z} = 1$ donc $\underline{\operatorname{th} z = 0 \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{Z},\ z = ik\pi}$.

2. Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in R^2$, on a

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^x\big(\cos y + i\sin y\big) - e^{-x}\big(\cos y - i\sin y\big)}{e^x\big(\cos y + i\sin y\big) + e^{-x}\big(\cos y - i\sin y\big)} = \frac{2\operatorname{sh} x\cos y + 2i\operatorname{ch} x\sin y}{2\operatorname{ch} x\cos y + 2i\operatorname{sh} x\sin y}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \ |\operatorname{th} z|^2 &= \frac{\big|\operatorname{sh} x\cos y + i\operatorname{ch} x\sin y\big|^2}{\big|\operatorname{ch} x\cos y + i\operatorname{sh} x\sin y\big|^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 x\cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x\sin^2 y}{\operatorname{ch}^2 x\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x\sin^2 y}\\ &= \frac{\operatorname{sh}^2 x\cos^2 y + (1 + \operatorname{sh}^2 x)\sin^2 y}{(1 + \operatorname{sh}^2 x)\cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x\sin^2 y} = \frac{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}\end{aligned}$$

Donc $|\operatorname{th} z| < 1 \Longleftrightarrow \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y < \operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y$ soit $\sin^2 y < 1 - \sin^2 y$ autrement dit $|\operatorname{th} z| < 1 \Leftrightarrow \sin^2 y < \frac{1}{2}$, donc $|\operatorname{th} z| < 1 \Leftrightarrow \sin y \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.
Donc, enfin, $\underline{\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow z \in \Delta = \left\{ z \in \mathbf{C} / |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4} \right\}}$.

3. ◇ D'après **2)** (implication $\Leftarrow$) on a $z \in \Delta \Longrightarrow |\operatorname{th} z| < 1$ donc <u>th application de Δ dans U</u>.
◇ On a $\operatorname{th} z = \dfrac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$ donc si $\xi \in \mathrm{U}$ on a :
(1) $\operatorname{th} z = \xi \Longleftrightarrow e^{2z} - 1 = \xi(e^{2z} + 1)$, (1) $\Longleftrightarrow e^{2z}\big(1 - \xi\big) = \xi + 1$, (1) $\Longleftrightarrow e^{2z} = \dfrac{1 + \xi}{1 - \xi}$.
Or $\dfrac{1 + \xi}{1 - \xi} \neq 0$, on peut donc écrire $\dfrac{1 + \xi}{1 - \xi} = re^{i\theta}$ avec $r = \left|\dfrac{1 + \xi}{1 - \xi}\right| > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ a priori. Mais $\theta = \pi$ donne $\dfrac{1 + \xi}{1 - \xi} = -r$ donc $r \neq 1$ et $\xi = \dfrac{r + 1}{r - 1}$ donc $\xi \in \mathbf{R}$, or $\mathbf{R} \cap \mathrm{U} =]-1, 1[$ et, si $\xi \in]-1, 1[$, $\dfrac{1 + \xi}{1 - \xi} \in \mathbf{R}_+^*$ ce qui est contradictoire. Donc $\theta \in]-\pi, \pi[$.
Mais (1) $\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{Z},\ z = \frac{1}{2}(\ln r + i\theta + 2ik\pi)$ et alors :

$$\begin{cases} z \in \Delta \\ \operatorname{th} z = \xi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z \in \Delta \\ \exists\, k \in \mathbf{Z},\ z = \frac{1}{2}\ln r + i\frac{\theta}{2} + ik\pi \end{cases} \Longleftrightarrow z = \frac{1}{2}\ln r + i\frac{\theta}{2}$$

car $\left|\dfrac{\theta}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}$. Donc, pour tout $\xi \in \mathrm{U}$, il existe un et un seul $z \in \Delta$ tel que $\operatorname{th} z = \xi$, $z = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1 + \xi}{1 - \xi}\right| + i\dfrac{\theta}{2}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$ est un argument de $\dfrac{1 + \xi}{1 - \xi}$. Donc <u>th est une bijection de Δ dans U</u>.
◇ Pour $x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1 + x}{1 - x} \in \mathbf{R}_+^*$ donc $\theta = 0$ et donc $\underline{\forall x \in]-1, 1[,\ \operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|}$.

4. a. Pour $\xi \in \mathrm{U}$, on a $|\xi \operatorname{th} n| = \operatorname{th} n < 1$ donc $1 - \xi\operatorname{th} n \neq 0$ et donc $u_n(\xi)$ est bien défini. Or, pour $z \in \Delta$, $\operatorname{th} z \in \mathrm{U}$ et donc $u_n(\operatorname{th} z)$ existe et on a :

$u_n(\operatorname{th} z) = (1-\operatorname{th} n)\dfrac{1+\operatorname{th} z}{1-\operatorname{th} z \operatorname{th} n} = \dfrac{1+\operatorname{th} z - \operatorname{th} n - \operatorname{th} z \operatorname{th} n}{1-\operatorname{th} z \operatorname{th} n} = 1 + \dfrac{\operatorname{th} z - \operatorname{th} n}{1-\operatorname{th} z \operatorname{th} n}$.

Or, comme dans $\mathbf{R}$, mais avec la condition $\operatorname{th} a \operatorname{th} b \neq 1$, on a $\operatorname{th}(a-b) = \dfrac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1-\operatorname{th} a \operatorname{th} b}$, en effet, $\dfrac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1-\operatorname{th} a \operatorname{th} b} = \dfrac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b} = \dfrac{\operatorname{sh}(a-b)}{\operatorname{ch}(a-b)} = \operatorname{th}(a-b)$.

Donc $\underline{\forall z \in \Delta,\ u_n(\operatorname{th} z) = 1 - \operatorname{th}(n-z)}$.

b. Pour $\xi \in \mathrm{U}$, $\operatorname{Argth}\xi \in \Delta$ donc $u_n(\xi) = 1 - \operatorname{th}\big(n - \operatorname{Argth}\xi\big)$ d'où $\underline{\mathrm{B}_n\big(\operatorname{Argth}\xi\big) = \prod_{k=1}^{n}\big[1 - u_n(\xi)\big]}$.

5. a. $|1+z| \leq 1 + |z| = \mathrm{e}^{|z|} - \sum_{k=2}^{+\infty}\dfrac{|z|^k}{k!}$ donc $\underline{\forall z \in \mathbf{C},\ |1+z| \leq 1+|z| \leq \mathrm{e}^{|z|}}$.

b. Tous les facteurs étant positifs, on a $\prod_{k=1}^{m}\big(1+|v_k|\big) \leq \prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{|v_k|}$ soit $\underline{\prod_{k=1}^{m}\big(1+|v_k|\big) \leq \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{m}|v_k|}}$.

c. Montrons la première inégalité par récurrence sur m:

$\rightarrow$ pour $m=1$, $\left|\prod_{k=1}^{1}\big(1+v_k\big) - 1\right| = |1+v_1-1| = |v_1| = \prod_{k=1}^{1}\big(1+|v_k|\big) - 1$;

$\rightarrow$ supposons le résultat vrai pour $m-1$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{k=1}^{m}(1+v_k) - 1\right| &= \left|\prod_{k=1}^{m-1}(1+v_k) - 1 + v_m\prod_{k=1}^{m-1}(1+v_k)\right| \\
&\leq \left|\prod_{k=1}^{m-1}(1+v_k) - 1\right| + \left|v_m\prod_{k=1}^{m-1}(1+v_k)\right| \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{m-1}\big(1+|v_k|\big) - 1\right) + |v_m|\prod_{k=1}^{m-1}|1+v_k| \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{m-1}\big(1+|v_k|\big) - 1\right) + |v_m|\prod_{k=1}^{m-1}\big(1+|v_k|\big) \\
&\leq \prod_{k=1}^{m}\big(1+|v_k|\big) - 1
\end{aligned}$$

On a donc la première inégalité par récurrence et la seconde découle immédiatement de **b.** donc

$$\underline{\left|\prod_{k=1}^{m}(1+v_k) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{m}\big(1+|v_k|\big) - 1 \leq \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{m}|v_k|} - 1}\ .$$

6. a. $\forall \xi \in \mathrm{U}_r,\ |u_n(\xi)| = |1-\operatorname{th} n|\left|\frac{1+\xi}{1-\xi\operatorname{th} n}\right| \leq (1-\operatorname{th} n)\frac{1+|\xi|}{|1-\xi\operatorname{th} n|} \leq (1-\operatorname{th} n)\frac{1+r}{1-|\xi|\operatorname{th} n} \leq (1-\operatorname{th} n)\frac{1+r}{1-r\operatorname{th} n}$. Donc $\|u_n\|_\infty^{\mathrm{U}_r} \leq (1-\operatorname{th} n)\dfrac{1+r}{1-r\operatorname{th} n}$. Or $(1-\operatorname{th} n)\dfrac{1+r}{1-r\operatorname{th} n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1+r}{1-r}(1-\operatorname{th} n)$ et $1-\operatorname{th} n = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-2n}$. Comme $\big(\sum \mathrm{e}^{-2n}\big)$ est une série (géométrique) convergente, $\Big(\sum \frac{1+r}{1-r}(1-\operatorname{th} n)\Big)$ converge et donc $\big(\sum \|u_n\|_\infty^{\mathrm{U}_r}\big)$ aussi. Donc $\underline{\big(\sum |u_n|\big)\text{ converge normalement donc uniformément sur }\mathrm{U}_r}$.

b. $\forall \xi \in \mathrm{U}_r,\ |B_n^*(\xi)| = \prod_{k=1}^{n}|1-u_k(\xi)| \leq \prod_{k=1}^{n}\big(1+|u_k(\xi)|\big) \leq \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n}|u_k(\xi)|} \leq \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n}\|u_n\|_\infty^{\mathrm{U}_r}} \leq \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{+\infty}\|u_n\|_\infty^{\mathrm{U}_r}}$. Donc, en posant $M_{(r)} = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{+\infty}\|u_n\|_\infty^{\mathrm{U}_r}}$, on a $\underline{\exists\, M_{(r)} > 0,\quad \forall \xi \in \mathrm{U}_r,\quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\quad |B_n^*(\xi)| \leq M_{(r)}}$.

c. $\forall \xi \in \mathrm{U},\ \left|B^*_{p+m}(\xi) - B^*_p(\xi)\right| = \left|\prod_{k=1}^{p+m}\left(1-u_k(\xi)\right) - \prod_{k=1}^{p}\left(1-u_k(\xi)\right)\right|$

$$= \left|B^*_p(\xi)\right| \left|\prod_{k=p+1}^{p+m}\left(1-u_k(\xi)\right) - 1\right| = \left|B^*_p(\xi)\right| \left|\prod_{k=1}^{m}\left(1-u_{p+k}(\xi)\right) - 1\right|$$

$$\leq \left|B^*_p(\xi)\right| \left[\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{m}|u_{p+k}(\xi)|} - 1\right] \quad \text{d'après } \mathbf{5)\ c.}$$

On a bien $\forall \xi \in \mathrm{U}, \quad \left|B^*_{p+m}(\xi) - B^*_p(\xi)\right| \leq \left|B^*_p(\xi)\right| \left[\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{m}|u_{p+k}(\xi)|} - 1\right]$.

7. a. Pour $\varepsilon > 0$ on a, puisque $M_{(r)} > 0$, $\varepsilon_r = \ln\left[1 + \dfrac{\varepsilon}{M_{(r)}}\right]$ existe et est strictement positif. Mais alors il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|u_{N+k}\|_\infty^{\mathrm{U}_r} = \sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty^{\mathrm{U}_r} \leq \varepsilon_r$ car $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty^{\mathrm{U}_r} = 0$ (reste d'une série convergente). Comme $\forall \xi \in \mathrm{U}_r,\ \forall k \in \mathbf{N}^*,\ |u_{N+k}(\xi)| \leq \|u_{N+k}\|_\infty^{\mathrm{U}_r}$ on a :

$$\exists\, N \in \mathbf{N}^*, \quad \forall \xi \in \mathrm{U}_r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u_{N+k}(\xi)| \leq \varepsilon_r\ .$$

b. ◇ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $N \in \mathbf{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N,\ \forall p > 0, \quad \forall \xi \in \mathrm{U}_r$,

$$\left|B^*_{n+p}(\xi) - B^*_n(\xi)\right| \leq |B^*_n(\xi)| \left[\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{p}|u_{n+k}(\xi)|} - 1\right] \leq M_{(r)} \left[\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{p}|u_{n+k}(\xi)|} - 1\right] \leq M_{(r)} \left[\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|u_{n+k}(\xi)|} - 1\right]$$

$$\leq M_{(r)} \left[\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}|u_{k}(\xi)|} - 1\right] \leq M_{(r)} \left[\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=N+1}^{+\infty}|u_{k}(\xi)|} - 1\right] = M_{(r)} \left[\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|u_{N+k}(\xi)|} - 1\right]$$

$$\leq M_{(r)}\left[\mathrm{e}^{\varepsilon_r} - 1\right] \leq M_{(r)} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{M_{(r)}}\right) - 1\right] \leq \varepsilon$$

d'après **6) c.**, **6) b.**, la convergence simple de la série $\left(\sum |u_k|\right)$ sur U_r vue en **6) a.** et **7) a.**.
Donc la suite (B^*_n) vérifie sur U_r le critère de Cauchy uniforme et donc

$$\forall r \in]0,1[,\ (B^*_n) \text{ converge uniformément sur } \mathrm{U}_r\ .$$

◇ (B^*_n) converge donc simplement sur U_r, pour tout $r \in]0,1[$. Or soit $\xi \in \mathrm{U}$, on a $\xi \in \mathrm{U}_{|\xi|}$ avec $|\xi| < 1$ donc $(B^*_n(\xi))$ converge. Donc (B^*_n) converge simplement sur U .

c. Puisque, pour $\xi \in \mathrm{U}$, $1 - \xi \operatorname{th} k \neq 0$ on a, pour tout k, u_k est continue sur U et donc B^*_n aussi comme produit de fonctions continues sur U. On a également $B^*_n \xrightarrow{S} B^*$ sur U et $B^*_n \xrightarrow{U} B^*$ sur U_r pour tout $r \in]0,1[$. Enfin $\forall \xi \in \mathrm{U}$, soit r tel que $|\xi| < r < 1$, on a $\xi \in B_o(0,r)$ qui est une boule ouverte donc un ouvert de $\mathbf{C}$ et qui vérifie donc $B_o(0,r) \in \mathcal{V}(\xi)$ et donc, puisque $\mathrm{U}_r \supset B_o(0,r)$, $\mathrm{U}_r \in \mathcal{V}(\xi)$. On a donc, grâce à un résultat de cours, B^* continue sur U .

8. a. Soit $\varphi(t) = \mathrm{e}^t - 2t$, on a $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1 < 0$ donc, par exemple, et grâce au théorème des valeurs intermédiaires car φ est continue sur $\mathbf{R}$, il existe $\varepsilon_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $\varphi(\varepsilon_0) = 0 < 1$.
Donc $\exists\, \varepsilon_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \quad \mathrm{e}^{\varepsilon_0} < 1 + 2\varepsilon_0$.

b. On a $\forall \xi \in \mathrm{U}, \quad \forall p \in \mathbf{N}^*,\ \forall m \in \mathbf{N}^*, \quad \left|B^*_{p+m}(\xi) - B^*_p(\xi)\right| \leq \left|B^*_p(\xi)\right| \left[\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{m} |u_{p+k}(\xi)|} \right]$ donc, en passant à la limite quand $m \to +\infty$, on obtient :
$\forall \xi \in \mathrm{U}, \quad \forall p \in \mathbf{N}^*, \quad \left|B^*(\xi) - B^*_p(\xi)\right| \leq \left|B^*_p(\xi)\right| \left[\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{\infty} |u_{p+k}(\xi)|} - 1 \right]$. Or $\left|B^*(\xi) - B^*_p(\xi)\right| \geq \left|B^*_p(\xi)\right| - |B^*(\xi)|$ donc $|B^*(\xi)| \geq \left|B^*_p(\xi)\right| \left[2 - \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{\infty} |u_{p+k}(\xi)|} \right]$. $\exists p, \ \sum_{k=1}^{\infty} |u_{p+k}(\xi)| \leq \varepsilon_0$ et alors, d'après **a.**, $2 - \mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{\infty} |u_{p+k}(\xi)|} \geq 2 - \mathrm{e}^{\varepsilon_0} > 2 - \big(1 + 2\varepsilon_0\big) = 1 - 2\varepsilon_0$. Donc en posant $K = 1 - 2\varepsilon_0 > 0$ (car $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}$) on a :

$$\underline{\forall \xi \in \mathrm{U}, \quad \exists p, \quad \exists K > 0, \quad |B^*(\xi)| \geq K \left|B^*_p(\xi)\right|}$$

9. a. Puisque $z \in \Delta$, $\operatorname{th} z \in \mathrm{U}$ et $B^*(\operatorname{th} z)$ est défini. Or $B^*(\operatorname{th} z) = \lim\limits_{p \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{p} \big(1 - u_k(\operatorname{th} z)\big) = \lim\limits_{p \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{p} \operatorname{th}(k - z)$. On peut donc poser $\underline{\text{pour } z \in \Delta, \ \prod_{k=1}^{+\infty} \operatorname{th}(k - z) = B^*(\operatorname{th} z)}$.

b. Pour $z \in \Delta$, $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} \operatorname{th}(k - z) = 0 \Longleftrightarrow B^*(\operatorname{th} z) = 0$. Mais, d'après **8) b.**, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ et $K > 0$ tels que $|B^*(\operatorname{th} z)| \geq K \left|B^*_p(\operatorname{th} z)\right|$ donc $B^*(\operatorname{th} z) = 0 \Longrightarrow B^*_p(\operatorname{th} z) \prod\limits_{k=1}^{p} \operatorname{th}(k - z) = 0$ et donc $\exists\, k \leq p, \ \operatorname{th}(k - z) = 0$.
Réciproquement, si $\exists\, k \in \mathbf{N}^*, \ \operatorname{th}(k - z) = 0$ alors $\forall p \geq k, \ B^*_p(\operatorname{th} z) = 0$ donc, en passant à la limite quand $p \to +\infty$, $B^*(\operatorname{th} z) = 0$.
Donc, pour $z \in \Delta$, $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} \operatorname{th}(k - z) = 0 \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{N}^*, \ \operatorname{th}(k - z) = 0$. Comme, d'après **1) a.**, $\operatorname{th}(k - z) = 0 \Longleftrightarrow \exists\, l \in \mathbf{Z}, \ k - z = 2il\pi$ soit $z = k - 2il\pi$ et $\left|\operatorname{Im}\big(k - 2il\pi\big)\right| = 2\pi\,|l| < \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow l = 0$.
Donc $\underline{\text{pour } z \in \Delta, \ \prod_{k=1}^{+\infty} \operatorname{th}(k - z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbf{N}^*}$.

c. On a $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbf{R}}} \operatorname{th}(k - x) = -1$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbf{R}}} B_{2n}(x) = \prod\limits_{k=1}^{2n} (-1) = (-1)^{2n} = 1$.
Donc si la convergence de (B_{2n}) était uniforme sur Δ, on aurait grâce au théorème d'interversion limite uniforme-limite en un point, en posant $B(z) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \operatorname{th}(k - x)$ pour $z \in \Delta$, $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbf{R}}} B(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbf{R}}} B_{2n}(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} (1) = 1$. On aurait alors, par composition des limites, $\lim\limits_{p \to +\infty} B(p) = 1$ ce qui n'est pas puisque $\forall p \in \mathbf{N}^*, \ B(p) = 0$.
Donc $\underline{\text{la convergence de } (B_{2n}) \text{ n'est pas uniforme sur } \Delta}$.

* * *
* *
*