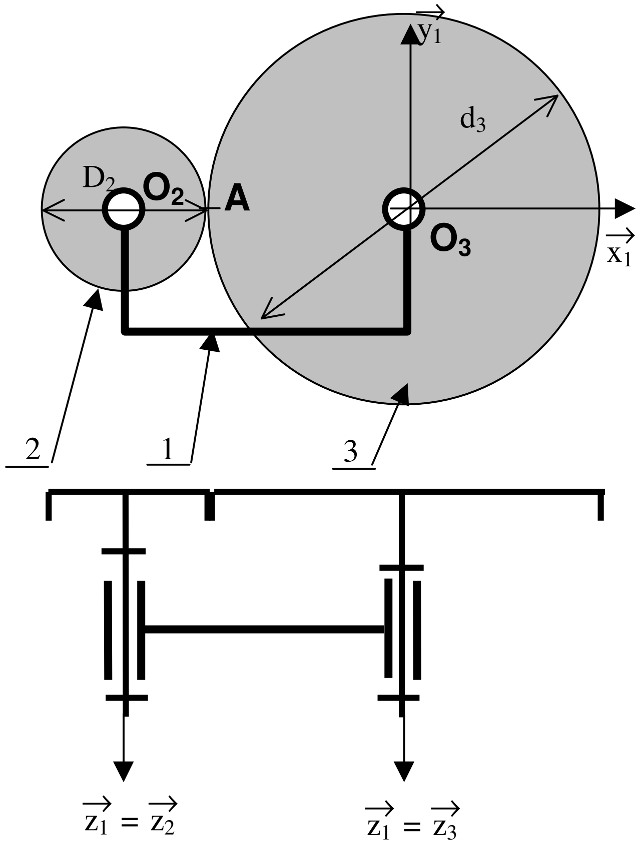
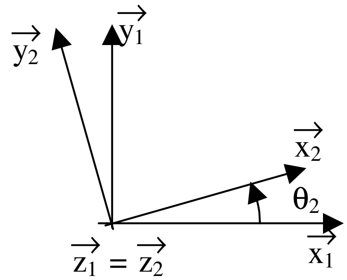
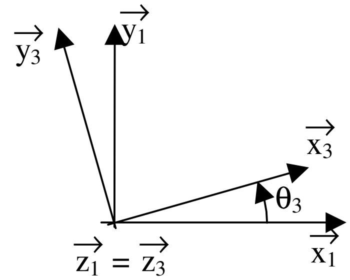
Engrenages

1. Roues de friction.

La transmission se fait par adhérence entre les deux poulies 2 et 3.







- **Aspect cinématique :**

remarque : le support 1, n'est pas forcément fixe

L'adhérence s'exprime cinématiquement par « la vitesse de glissement est nulle » : ce qui veut dire que ;

$$\vec{v}_{A,3/2} = \vec{0}$$

On note $\theta_2 = \omega_{2/1}$ et $\theta = \omega_{3/1}$

Et on montre que :

$$\frac{\omega_{3/1}}{\omega_{2/1}} = -\frac{d_2}{d_3}$$

- **Aspect effort.**
  On applique de théorème de l'énergie cinétique à {2,3} en régime permanent. Tant qu'il y a adhérence sans résistance au roulement la liaison entre les deux roues est parfaite. Alors $\|C_s\| = \frac{d_3}{d_2}.\|C_e\|$

- **Inconvénients.**
  Les relations ci-dessus, sont vraies à condition que le roulement sans glissement soit toujours vérifié :

  L'adhérence dépend de l'effort presseur entre les deux roues et de leur matériaux. Plus cet effort sera élevé, plus l'adhérence sera importante, et par conséquent, plus le couple transmissible sera important.

  Par contre, plus l'effort presseur sera important, plus la résistance au roulement aussi. De plus cet effort risque de détériorer les matériaux qui fatiguent (laminage). Finalement, l'adhérence pour les poulies est rapidement limitée. On ne peut espérer de très grandes performances de cette solution.

  Par ailleurs, il peut servir de limiteur de couple (sécurité). Une étude classique (de statique ou dynamique) permet de déterminer le couple maxi.

- **Remarque**
  Si on désire tenir compte de la résistance au roulement et des frottement dans les pivots, l'étude énergétique (TEC) est très adapté : on utilise le rendement η (sans unité $\in$ [0 ; 1]). Des tableaux donnent les rendements pour les solutions techniques courantes. Alors $\|C_s\| = \eta.\frac{d_3}{d_2}.\|C_e\|$

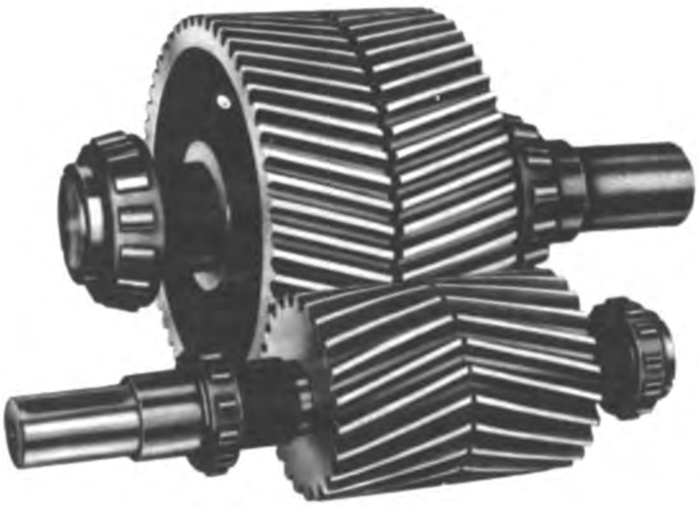
2. Réducteurs de vitesse à engrenages.

Même fonction que les roues de friction. La transmission se fait par obstacle, ce qui implique un rapport de transmission rigoureux (pas de « glissement »).

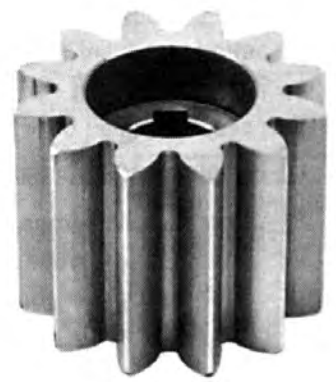
Un **engrenage** est constitué de **deux roues dentées**. La petite est appelée **pignon** et la plus grande **roue**.

La position des axes permet de distinguer :

- Les engrenages à axes parallèles à denture droite ou à denture hélicoïdale.
- Les engrenages à axes concourants.
- Les engrenages gauches.

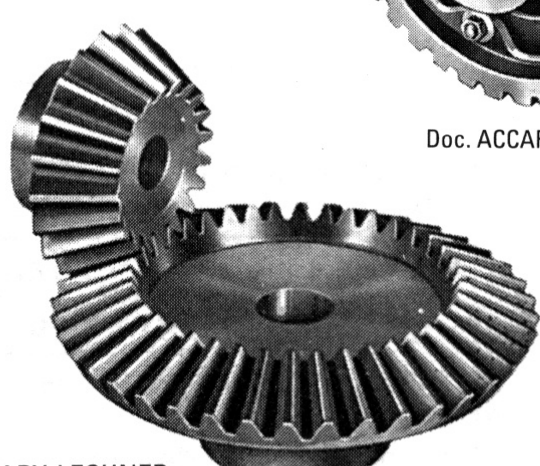


Roues hélicoïdales jumelées avec arbres et roulements



Doc. ACCARY-LECHNER

Doc. ACCARY-LECHNER



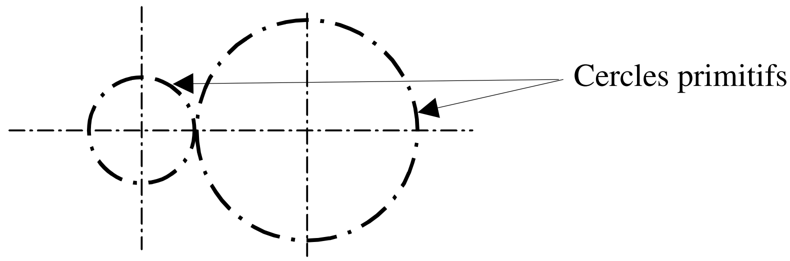
Doc. ACCARY-LECHNER

Engrènement de deux roues à denture hélicoïdale

2.1 Engrenages à axes parallèles à dentures droites.

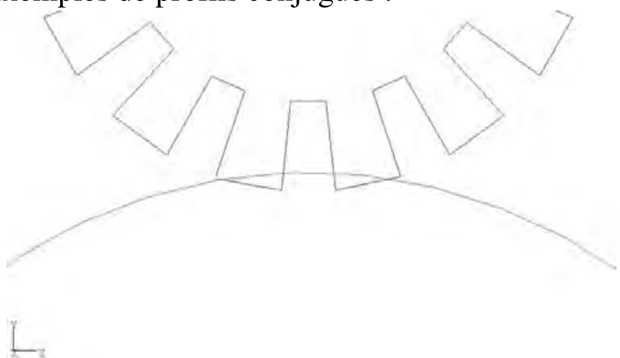
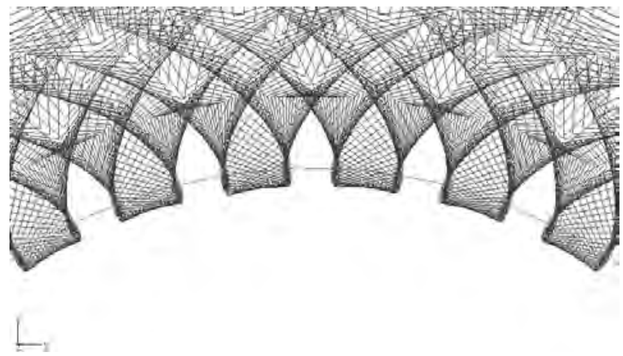
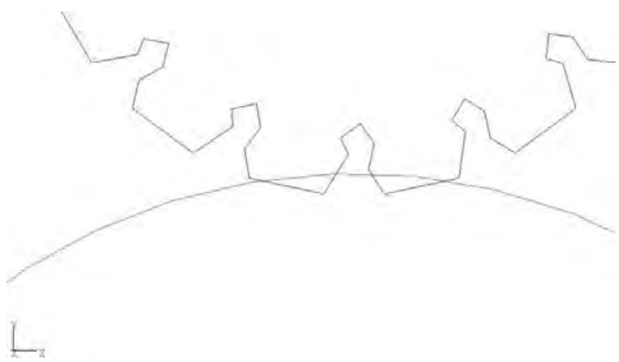
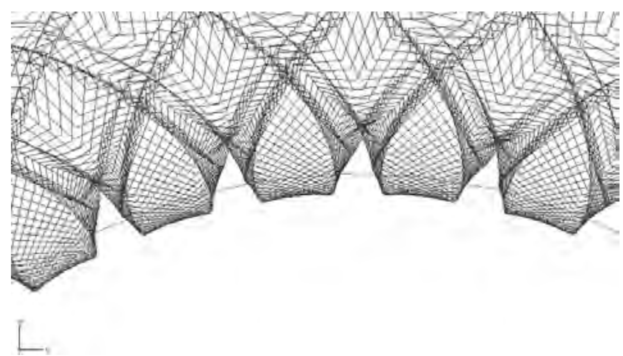
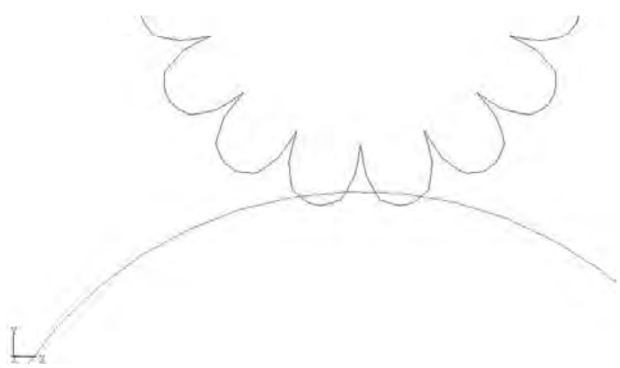
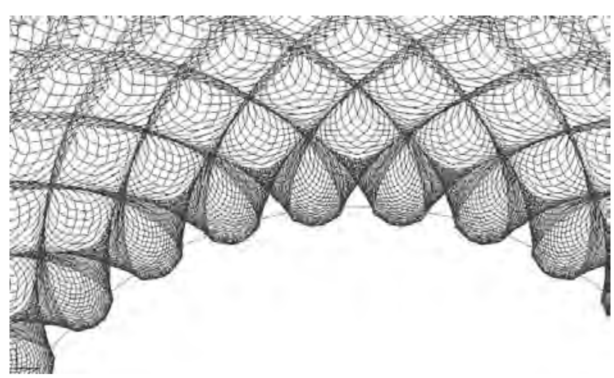
- **Aspect cinématique :**

Objectif : l'engrenage doit se comporter comme des roues de friction, c'est à dire que le pignon doit rouler sans glisser sur la roue sur un cercle fictif appelé **cercle primitif** (diamètre primitif).



Pour répondre à cette condition les profils de dents doivent être des **profils conjugués**.

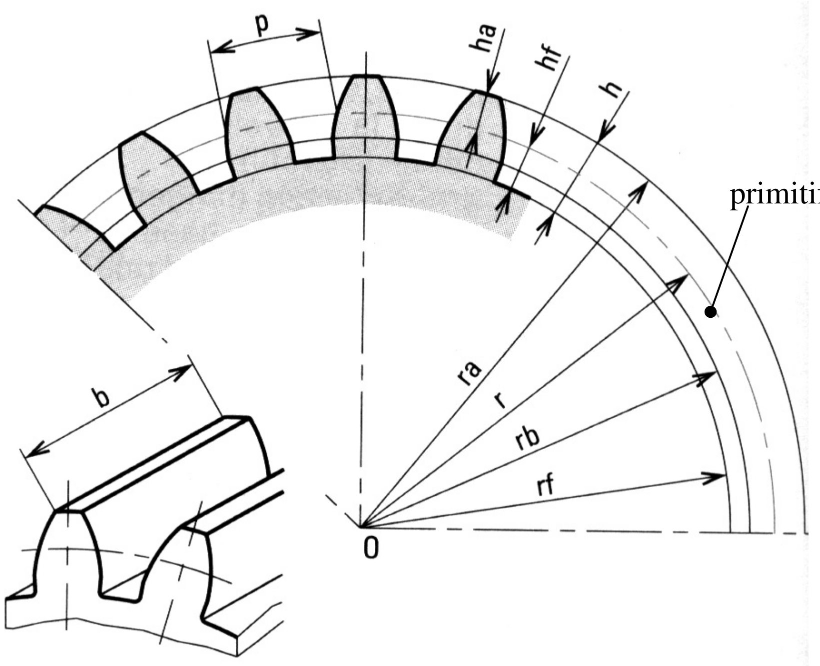
Exemples de profils conjugués :

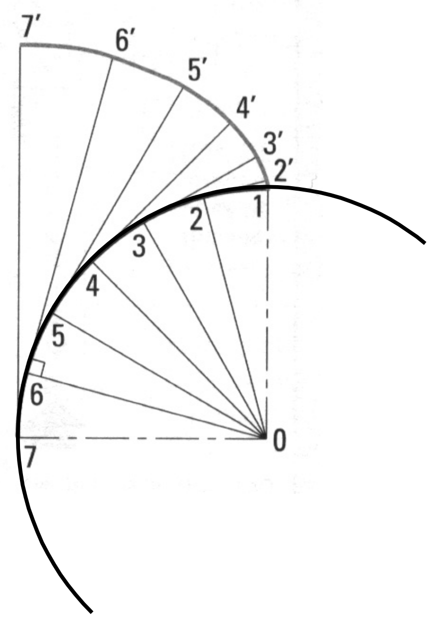







Ainsi, l'engrenage se comporte *comme s'il n'y avait pas glissement entre les diamètres primitifs*. Par contre, il y a bien glissement et frottement entre les dents (d'où lubrification, graissage).

- **Aspect géométrique.**

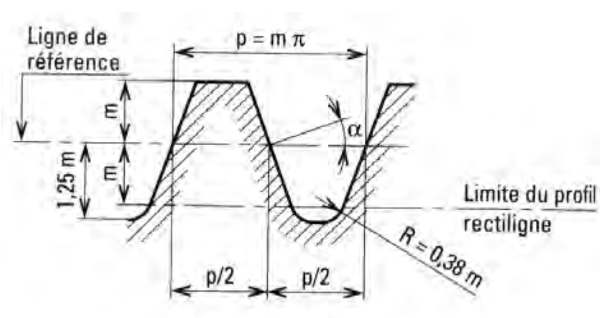
Le profil le plus utilisé est le **profil en développante de cercle**. Il corresponds à la trajectoire d'un point d'un fil que l'on déroule d'une bobine.





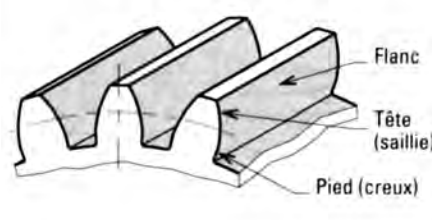
Il est couramment utilisé car :

- ♣ Il est aisé à obtenir, à l'aide d'un simple outil crémaillère (ci-contre).
- ♣ Les deux roues ont même forme de profil.
- ♣ Pratiquement toute la surface de la dent participe à la surface (usure régulière).
- ♣ Il admet une variation d'entraxe sans perturbation du fonctionnement (accepte des défauts).
- ♣ Avantages au niveau des efforts (voir chapitre suivant).



Caractéristiques géométriques :

- ♣ $\mathbf{d_1}$ et $\mathbf{d_2}$ sont les diamètres primitifs des roues.
- ♣ **m** est le module (en mm). **p** est le pas ($p = m.\pi$).
- ♣ $\mathbf{Z_1}$ et $\mathbf{Z_2}$ sont les nombres de dents des roues : avec **d = m.Z**. Généralement Z est supérieur à 13 (risque d'interférence)



- ♣ Condition d'engrènement : le module (m) est identique pour les deux roues.

- **Aspect cinématique**.

Il y a roulement sans glissement entre le pignon et la roue sur les diamètres primitifs, alors la relation est la même que pour les roues de friction : $\frac{\omega_{3/1}}{\omega_{2/1}} = -\frac{d_2}{d_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_{3/1}}{\omega_{2/1}} = -\frac{Z_2}{Z_3}$

1 est une pièce pour laquelle, les axes de rotation de 2 et 3 sont immobiles. 1 peut être mobile par rapport à un bâti.

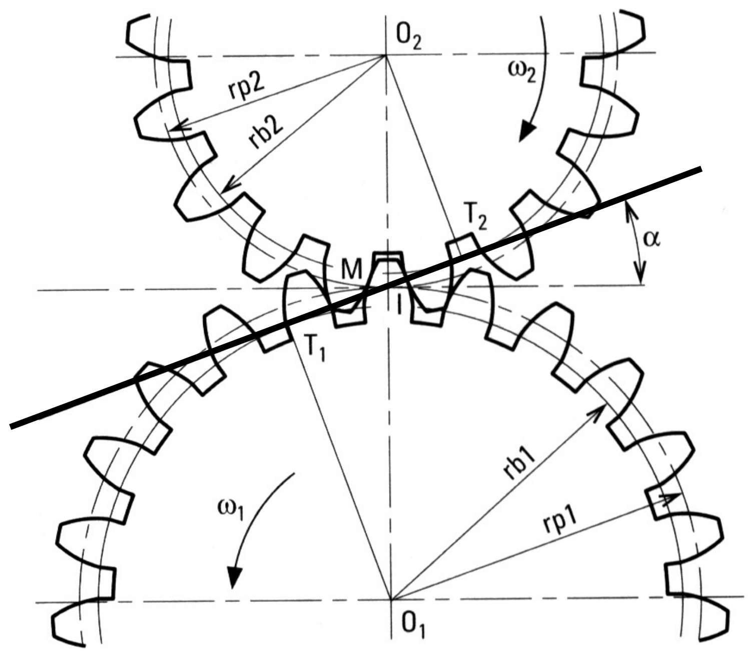
- **Aspect statique :**

Globalement, l'action mécanique d'une dent sur l'autre peut être modélisée par un glisseur :

♣ *direction* : quelles que soient les positions des dents sa direction est constante : son orientation est donnée par l'angle de pression (α) (**normale** aux surfaces de contact)

♣ *Point de réduction* : quelles que soient les positions des dents, il se trouve au point de tangence des deux cercles primitifs.

♣ **Conclusion** : globalement l'action de la roue sur le pignon est modélisée par un glisseur d'orientation constante ◊ bras de levier constant ◊ couple transmis proportionnel au couple d'entrée ◊ **un minimum de vibration** (gros avantage).

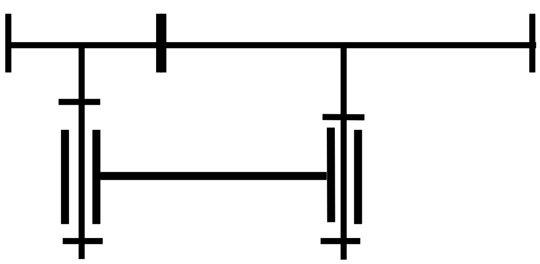


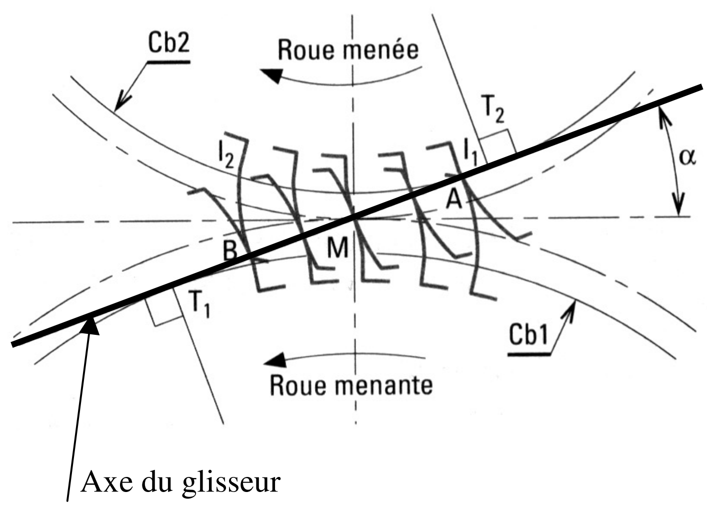
- **Calcul du couple transmissible :**

Théorème de l'énergie cinétique en régime permanent :

$$\|C_s\| = \frac{Z_3}{Z_2}.\|C_e\|$$

- Schématisation : voir G.D.I.

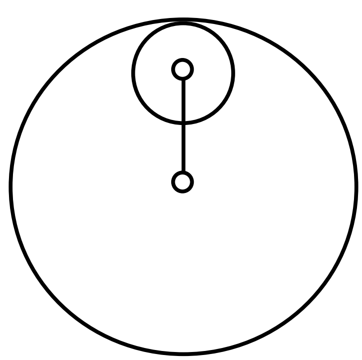


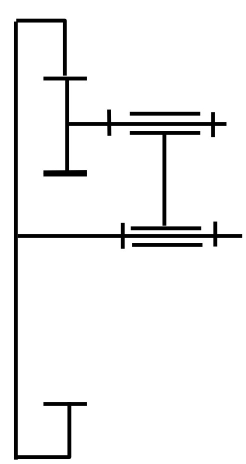


Axe du glisseur

2.2 Engrenage intérieur :

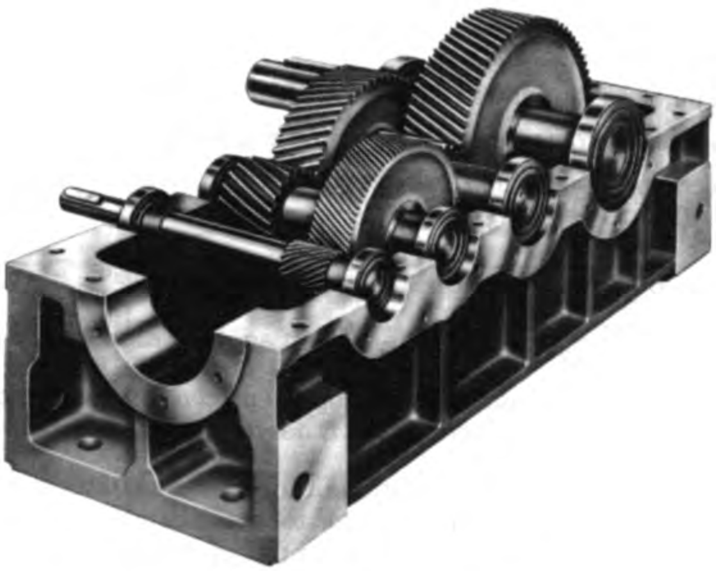
$$\frac{\omega_{3/1}}{\omega_{2/1}} = +\frac{Z_2}{Z_3}$$



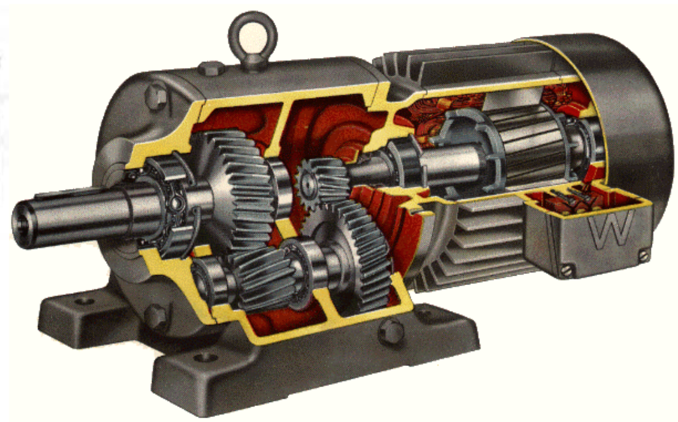


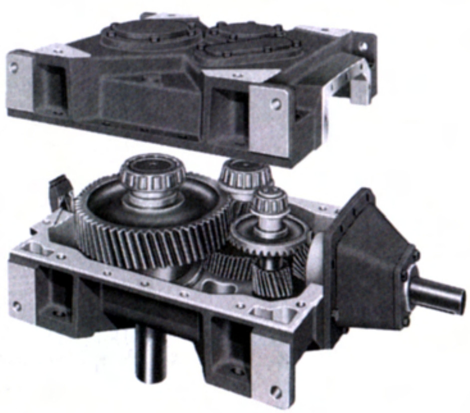
3. Différents types de réducteurs.

- Réducteurs à un engrenage, réducteurs étagés.

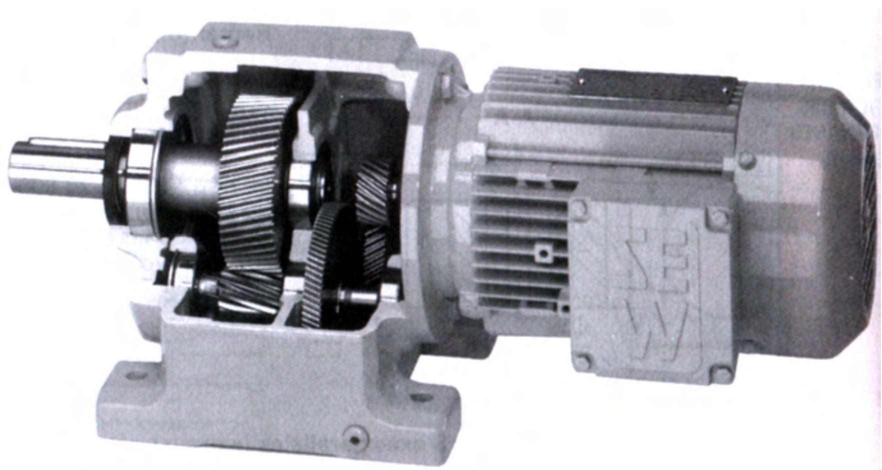


Montage des roues dentées





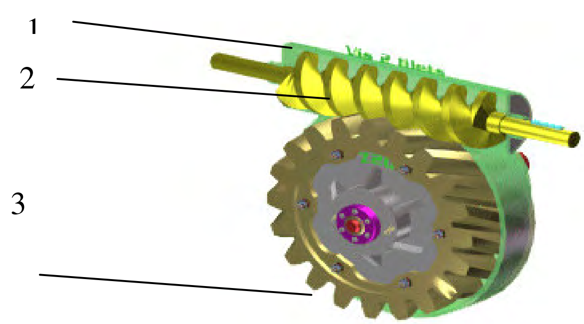
Doc. BROOK-HANSEN



- **Vis sans fin.**

$$\frac{\omega_{3/1}}{\omega_{2/1}} = +\frac{Z_2}{Z_3}$$

avec Z_2 nombre de filets de la vis 2.

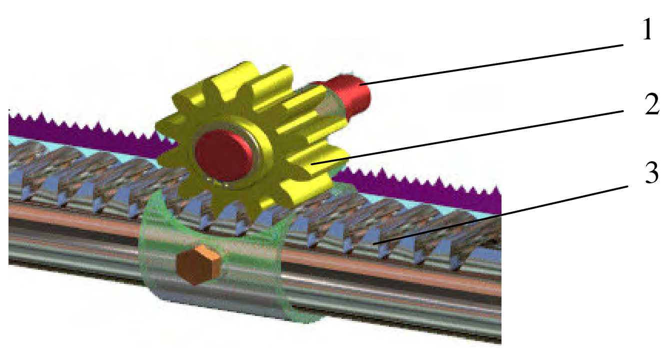


- **Pignon crémaillère**.

$v_{3/1} = ½.\omega_{2/1}.m.Z_2$

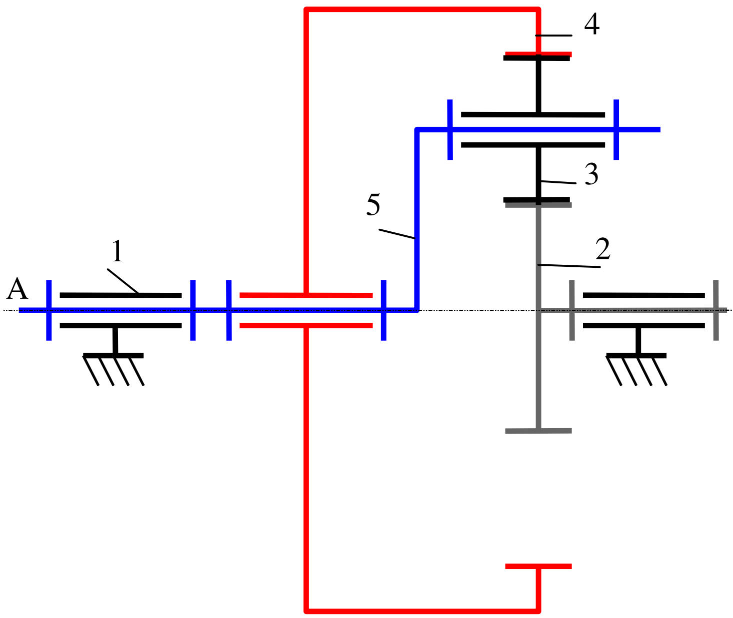
Avec m, module du pignon.

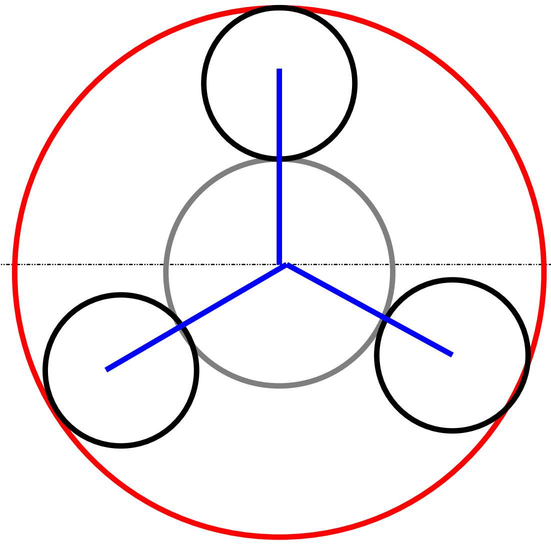
Car $v_{3/1} = \omega_{2/1}.r_1$ et $r_1 = ½. m.Z_2$



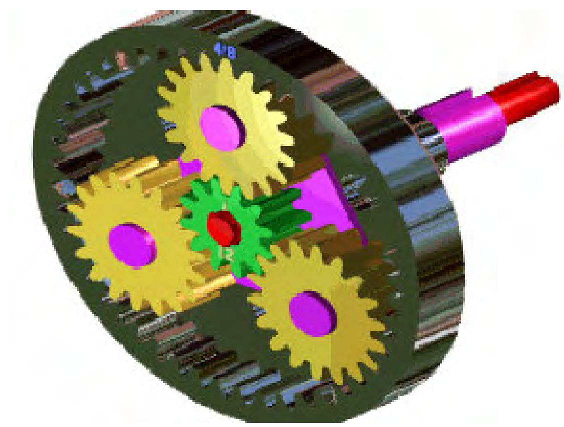
4. Train épicycloïdal.

4.1 Aspect cinématique.





- **1** est le bâti, alors que **3** sont les satellites (il sont au nombre de trois pour des raisons d'équilibre).
  2 est le planétaire intérieur et **4** le planétaire extérieur.



- **2**, **4** et **5** sont en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ par rapport à **1**. Cinématiquement **2**, **4** et **5** sont en liaison pivot l'un par rapport à l'autre. Concrètement, ces liaisons ne sont pas toujours réalisées (voir exemple).

  Pour des raisons géométriques $Z_4 = Z_2 + 2.Z_3$

- **Degré de mobilité d'un train** : les rotations de **2**, de **4** et de **5** sont couramment utilisées comme entrée ou comme sortie. Si on bloque le planétaire **4** (ce qui est encore plus courant) **2** et **5** peuvent encore tourner, mais leurs rotation sont liées.
  Il y a donc 2 mobilités indépendantes.

- Recherche de la relation entre $\omega_{2/1}$, $\omega_{4/1}$, et $\omega_{5/1}$.

Premier engrenage : roue 2 et 3 : $\dfrac{\omega_{3/5}}{\omega_{2/5}} = -\dfrac{Z_2}{Z_3}$

Γ au 5

Second engrenage: roue 4 et 3: $\dfrac{\omega_{4/5}}{\omega_{3/5}} = \dfrac{Z_3}{Z_4}$

$$\dfrac{\omega_{4/5}}{\omega_{2/5}} = -\dfrac{Z_2}{Z_4} = \lambda \text{ (raison)}$$

Par rapport au bâti : $\dfrac{\omega_{4/1} - \omega_{5/1}}{\omega_{2/1} - \omega_{5/1}} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \omega_{4/1} - \lambda.\omega_{2/1} + (\lambda - 1).\omega_{5/1} = 0$

Remarque : généralement un des trois est bloqué. Vient donc la relation d'entrée sortie. En permutant, la pièce bloquée et les entrées sorties, on peut obtenir plusieurs vitesses (boîtes de vitesses automatiques).

4.2 Aspect dynamique.

Utilisation du théorème de l'énergie cinétique en régime permanent (on pourrait aussi le faire en régime transitoire…).

C_2, C_4 et C_5 sont respectivement les couples appliqués par l'extérieur sur **2**, **4** et **5**.

- **T.E.C. :**

la somme des puissances développées par les efforts extérieurs à un système est nulle puisque l'énergie cinétique est constante.

$$P_{ext\to 5} + P_{ext\to 2} + P_{ext\to 4} = 0$$

- **Calcul des puissances** :

Mouvements de rotation donc T.E.C devient :

$$C_5.\omega_{5/1} + C_2.\omega_{2/1} + C_4.\omega_{4/1} = 0$$

- Le système a deux mobilités : éliminons donc une vitesse de rotation qui peut être exprimée en fonction des autres. Par exemple : $\omega_{4/1} = \lambda.\omega_{2/1} + (1 - \lambda).\omega_{5/1}$

Alors : $$C_5.\ \omega_{5/1} + C_2.\omega_{2/1} + C_4.[\lambda.\omega_{2/1} + (1 - \lambda).\omega_{5/1}] = 0$$

$$(C_2 + C_4.\ \lambda.).\omega_{2/1} + [C_5 + C_4.(1 - \lambda)].\ \omega_{5/1} = 0$$

Cette relation est vraie tout le temps : quels que soient $\omega_{2/1}$ et $\omega_{5/1}$. Ces derniers sont indépendants l'un de l'autre.

Alors, les facteurs devant les vitesses doivent être chacun nuls.

$$\begin{cases} C_2 + \lambda.C_4 = 0 \\ C_5 + (1 - \lambda).C_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = \lambda.C_4 \\ C_5 = (\lambda - 1).C_4 \end{cases}$$

$$C_2 = -\lambda.C_4 = \frac{\lambda}{1 - \lambda} C_5$$

Remarques :

On obtiendrait les mêmes résultats si on avait éliminé une autre vitesse que $\omega_{4/1}$.

On obtiendrait les mêmes résultats si on avait considéré une des vitesses nulle. Mais une seule relation.

Il est conseillé d'étudier le régime transitoire quand une des mobilité est bloquée. On mettra en évidence le moment d'inertie équivalent ramené.