[redacted]

[redacted]

Partiel 1 de mathématique SPE D & E

Durée : 4h00 - Calculatrice alphanumérique autorisée

Exercice 1. *Une matrice sans racine carrée*

On considère la matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = N$.

1. La matrice N est-elle diagonalisable ?
2. Préciser les matrices N^2 et N^3.
3. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A$.
   a) Soit λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $\lambda^2 = 0$.
   b) En déduire le spectre de M, puis le polynôme caractéristique χ_M de M.
   c) En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, à savoir que $\chi_M(M)$ est la matrice nulle, mettre en évidence une contradiction et conclure.

Exercice 2.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 0 & 4/5 \\ 1/2 & 4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A (il est fortement conseillé que commencer par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$).
2. Préciser les valeurs propres de A et justifier que A est diagonalisable.
3. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A rangées par ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ et on note D la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.

4. *Puissance n-ième de A*

   a) Pour $n \in \mathbb{N}$, rappeler (sans démonstration) la relation existant entre A^n, D^n et P.

   b) Calculer les coefficients de P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

   c) Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter les coefficients de A^n.

5. *Commutant de A*

   On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A :

   $$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

   a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   b) Soient $B \in \mathcal{C}$ et X_1 un vecteur propre de A associé à λ_1.
   Justifier que $BX_1 \in Ker(A - \lambda_1 I_3)$ et en déduire que X_1 est un vecteur propre de B.

   c) Soit $B \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

   d) Préciser la dimension de $\mathcal{C}$.

Exercice 3. L'objet du problème est l'étude de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Dans une première partie, nous démontrerons, sans utiliser les séries de Riemann, que cette série converge et on établira un encadrement de son reste d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. La deuxième partie sera consacrée au calcul de sa somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Dans tout le problème, on considérera la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des sommes partielles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Partie 1. Convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

1. *Convergence de la série*

   a) Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la majoration

   $$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s_n est majoré par 2.

   c) En déduire que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et que $S \leqslant 2$.

2. *Encadrement du reste*

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le reste d'ordre n : $r_n = S - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Démontrer, par une comparaison série-intégrale que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

   b) Une valeur arrondie de s_{10} à 10^{-6} près est : 1,549 768. À partir de ces données, déterminer un encadrement, le plus précis possible, de S.

Partie 2. Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et :} \qquad K_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\,J_n.$$

1. Calculer I_0, J_0 et K_0.

2. a) À l'aide d'une intégration par parties , démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\,I_n.$$

Indication : on effectuera une intégration par parties à partir de I_{n+1} en posant :

$$u(t) = \cos^{2n+1}(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = \cos(t).$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit $n \geqslant 1$.

a) Démontrer la relation : $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

Indications : on effectuera deux intégrations par parties à partir de I_n en posant :

$$u_1(t) = \cos^{2n} t \quad \text{et} \quad v_1'(t) = 1, \quad \text{puis} \quad u_2(t) = \sin(t)\,\cos^{2n-1}(t) \quad \text{et} \quad v_2'(t) = 2t.$$

b) En déduire que $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$.

c) Démontrer la relation : $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = K_0 - K_n$.

4. a) À l'aide d'une étude de fonction, démontrer que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad t \leqslant \frac{\pi}{2}\,\sin(t).$$

b) En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\,(I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2\,I_n}{8(n+1)} \quad \text{puis} \quad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}.$$

c) Déterminer alors la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.