UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DILWORTH ET APPLICATIONS À UN PROBLÈME DE COUVERTURE DES GRAPHES.

IOAN TOMESCU

ABSTRACT. - A new proof of Dilworth's theorem with applications to a problem of covering of graphs without circuits is given.

Dans ce travail on présente une démonstration directe en termes des graphes, du théorème de Dilworth pour le cas fini. La notion de chemin correspond à la notion de chaîne et la notion de coupure avec la propriété *) correspond à la notion d'antichaîne [1].

En utilisant une transformation étudiée par M. Aigner [2], l'on applique ce resultat au cas de la couverture d'un graphe par des arcs. On démontre aussi que le nombre minimal des chaînes qui couvrent un arbre est égal au plus petit entier plus grand ou égal au nombre des sommets pendants, divisé à deux.

Etant donné un graphe $G = (X, \Gamma)$ avec $|X| = n$ sommets $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ et $\mu = (x_\alpha, \ldots, x_\beta)$ un chemin qui va de x_α à x_β, l'on note par $S(\mu)$ $= \{x_\alpha, x_\beta, \ldots\}$ l'ensemble des sommets qu'il rencontre.

Un chemin μ est maximal si, pour tout chemin ν avec $S(\mu) \subset S(\nu)$ l'on déduit que $\mu = \nu$. L'ensemble des chemins maximaux du graphe G est noté $\mathcal{C}(G)$. Une couverture du graphe G (par des sommets) est une famille A de chemins qui contiennent tous les sommets du graphe, c'est-à-dire $\bigcup_{\mu \in A} S(\mu) = X$.

Dans ce qui suit on obtient une évaluation du nombre min $\{|A| \mid \bigcup_{\mu \in A} S(\mu) = X\}$ au cas des graphes sans circuits. Pour obtenir une couverture minimale nous pouvons considérer seulement les chemins maxi-

Ricevuto il 6-6-1969.

maux. L'ensemble des couvertures (par des sommets) du graphe G, composées des chemins maximaux, sera noté $\mathrm{Couv}_s(G)$.

Une coupure du graphe G (par des sommets) est par définition un ensemble $C \subset X$ avec les propriétés suivantes :

i) $\forall\, \mu \in \mathcal{C}(G),\ S(\mu) \cap C \neq \varnothing$.

ii) C est minimal avec la propriété i), c'est à-dire tout sous-ensemble strict de C ne possède plus i).

L'on note par $\mathrm{Coup}_s(G)$ l'ensemble des coupures (par des sommets) du graphe G et par $\mathrm{Coup}_s^*(G) \subset \mathrm{Coup}_s(G)$ l'ensemble des coupures qui possèdent la propriété suivante :

*) Si $C \in \mathrm{Coup}_s^*(G)$, alors $\forall\, \mu \in \mathcal{C}(G)\ |S(\mu) \cap C| = 1$, c'est-à-dire tout chemin maximal du graphe G contient un sommet et un seul qui appartient à la coupure C.

Au cours de la démonstration du théorème 1_A l'on prouve que l'ensemble $\mathrm{Coup}_s^*(G)$ n'est pas vide.

En utilisant les définitions données, on déduit aisement que

$$\min\ \{|A| \mid A \in \mathrm{Couv}_s(G)\} \geq \max\ \{|C| \mid C \in \mathrm{Coup}_s^*(G)\}.$$

THÉORÈME 1_A (Dilworth). Si le graphe G n'a pas de circuits, alors

$$\min\ \{|A| \mid A \in \mathrm{Couv}_s(G)\} = \max\ \{|C| \mid C \in \mathrm{Coup}_s^*(G)\}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $B = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r\} \in \mathrm{Couv}_s(G)$ une couverture qui réalise le minimum cherché. En vertu de la propriété de minimalité, il existe un ensemble de sommets : $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ avec les propriétés suivantes : $x_{i_k} \in S(\mu_k)$ et $x_{i_k} \notin \bigcup_{\substack{j=1,\ldots,r \\ j \neq k}} S(\mu_j)$ pour tout $k = 1, \ldots, r$.

Nous notons $x_{i_k} = R(\mu_k)$. Au cas des graphes sans circuits, nous pouvons choisir les représentants $x_{i_1} x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ d'une telle manière que $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$ $\ldots, x_{i_r}\} \in \mathrm{Coup}_s^*(G)$.

Si $\mu, \nu \in B$ et ils ont un sommet commun x_k, c'est-à-dire $\mu = (\mu_1, x_k, \mu_2)$, $\nu = (\nu_1, x_k, \nu_2)$, nous choisirons les représentants $R(\mu)$ et $R(\nu)$ ainsi que $R(\mu) \in S(\mu_1)$ et $R(\nu) \in S(\nu_1)$ ou $R(\mu) \in S(\mu_2)$ et $R(\nu) \in S(\nu_2)$.

Dans ce cas, les chemins μ et ν seront nommés compatibles au sommet x_k. Si par exemple $R(\mu) \in S(\mu_1)$ et $R(\nu) \in S(\nu_2)$ et le sous-chemin μ_2 ne contient plus un représentant $R(\mu_2)$, c'est-à-dire $S(\mu_2) \subset \bigcup_{\substack{\eta \in B \\ \eta \neq \mu}} S(\eta)$, alors nous pouvons considérer une autre couverture minimale B' qui s'obtient de B en remplaçant le chemin μ par le chemin $\mu' = (\mu_1, x_k, \nu_2)$ et $R'(\mu') \in$ $\in S(\mu_1)$, $R'(\nu) \in S(\nu_1)$, donc les chemins μ' et ν sont compatibles en x_k.

Ce procédé d'adjonction des chemins qui sont incompatibles dans certains sommets et de changement de représentants s'arrête quand nous obtenons seulement des chemins qui ont deux représentants chacun, situés aux côtés opposés relativement au sommet d'incompatibilité. Au cas des graphes sans circuits, il peut choisir un représentant pour chaque chemin maximal qui appartient à la couverture minimale d'une telle façon que les chemins de la couverture soient deux à deux compatibles.

Pour deux chemins μ et ν qui sont incompatibles dans le sommet x_k, nous avons vu qu'ils existent deux paires de représentants $R_1(\mu) \in S(\mu_1)$; $R_2(\mu) \in S(\mu_2)$ et $R_1(\nu) \in S(\nu_1)$; $R_2(\nu) \in S(\nu_2)$ si $\mu = (\mu_1, x_k, \mu_2)$; $\nu = (\nu_1, x_k, \nu_2)$. Nous avons donc deux variantes pour la compatibilité : $R_1(\mu)$ et $R_1(\nu)$ ou $R_2(\mu)$ et $R_2(\nu)$. Nous choisirons par exemple les représentants uniques $R_1(\mu)$ pour μ et $R_1(\nu)$ pour ν.

Pour tous les chemins qui sont incompatibles avec μ dans certains sommets nous choisirons l'un des deux représentants ainsi que la condition de compatibilité soit respectée, nous continuerons avec le chemin ν, etc.

Il reste de démontrer que ce procédé constructif n'est pas contradictoire au cas des graphes sans circuits, c'est-à-dire nous ne pouvons pas arriver sur deux chaînes distinctes à un même chemin avec deux représentants opposés relativement à un sommet d'incompatibilité.

Du point de vue topologique, cela revient à la démonstration du fait suivant : Si un cycle avec p sommets, représenté dans le plan par un polygone n'est pas un circuit, alors un choix de s points ($s < p - 1$) situés chacuns sur s côtés consecutifs (ou sur ses prolongements) ainsi que la condition de compatibilité (donnée ci-dessus) soit satisfaite, détermine un choix de points sur les côtés restés avec la réalisation de la condition de compatibilité.

La démonstration de cette propriété se fait par induction par rapport à p : nous considérons un sommet B du polygone et remplaçons les arêtes $[A, B]$ et $[B, C]$ ainsi : les arcs (A, B) et (B, C) par l'arc (A, C) ou les arcs (C, B) et (B, A) par (C, A) ou les arcs (A, B) et (C, B), aussi que les arcs (B, A) et (B, C) par un arc qui ne forme pas un circuit avec les arcs restés.

Pour le polygone ainsi construit nous obtenons un point M sur l'arête $[A, C]$ qui détermine un choix compatible de points sur $[A, B]$ et $[B, C]$, quelle que soit la position du point M sur la droite AC, parce que pour un triangle qui n'est pas un circuit, la propriété résulte aisement.

Donc nous avons trouvé une couverture minimale $B = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ et un choix de représentants telle que les chemins $\mu_1, \dots, \mu_r$ soient deux à deux compatibles. Alors $R(B) = \{R(\mu_1), R(\mu_2), \dots, R(\mu_r)\} \in \text{Coup}_s(G)$. En effet, si le chemin maximal $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s)$ où ν_k est un sous-chemin de

μ_{i_k}(en vertu de la propriété de couverture) a la propriété $S(\nu) \cap R(B) = \varnothing$, alors il existe au moins deux chemins incompatibles.

La propriété ii) se déduit de la définition des représentants et la propriété $*$) de la condition de compatibilité, donc nous avons obtenu aussi l'inégalité contraire :

$$\min\{|A| \mid A \in \mathrm{Couv}_s(G)\} \leq \max\{|C| \mid C \in \mathrm{Coup}_s^*(G)\} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour le graphe $G = (X, U)$ avec U l'ensemble des arcs, l'on définit (voir par exemple [2]) un graphe $\varphi(G) = (Y, V)$ par les relations suivantes :

$$x_{\alpha,\beta} \in Y \Longleftrightarrow (x_\alpha, x_\beta) \in U; \; (x_{\alpha,\beta}, x_{\gamma,\delta}) \in V \Longleftrightarrow (x_\alpha, x_\beta) \in U \text{ et } (x_\gamma, x_\delta) \in U \text{ et } \beta = \gamma.$$

Par cette application, la longueur des chemins, à l'exception des circuits, decroît avec une unité, donc nous pouvons caractériser les graphes sans circuits par la condition suivante :

Il y a un indice t avec $\varphi^t(G) = G_\varnothing$ où le graphe $G_\varnothing$ n'a aucun sommet (condition nécessaire et suffisante).

Pour le graphe G nous définissons une couverture (par des arcs) comme une famille B de chemins avec la propriété : $\bigcup_{\mu \in B} A(\mu) = U$ si l'on note par $A(\mu)$ l'ensemble des arcs du chemin μ.

Nous obtenons les définitions de $\mathrm{Couv}_a(G)$ et de $\mathrm{Coup}_a^*(G)$ si l'on considère la correspondance : sommet $\longrightarrow$ arc, $S(\mu) \longrightarrow A(\mu)$ et $X \longrightarrow U$.

THÉORÈME 1_B. Si le graphe G n'a pas de circuits, alors

$$\min\{|B| \mid B \in \mathrm{Couv}_a(G)\} = \max\{|C| \mid C \in \mathrm{Coup}_a^*(G)\}.$$

Pour la démonstration s'applique le théorème 1_A pour le graphe $\varphi(G)$.

Pour un graphe G, le nombre minimal des chaînes qui couvrent tous les sommets (ou toutes les arêtes) est égal au nombre des composantes connexes du graphe.

Pour obtenir un résultat non trivial, il faut considérer par exemple seulement les chaînes élémentaires.

Un sommet $x \in X$ est pendant si $|\Gamma x \cup \Gamma^{-1} x| = 1$. L'on note par $\{G_i\}_{i \in I}$ la famille des composantes connexes du graphe G et par $p(G_i)$ le nombre des sommets pendants de G_i.

THÉORÈME 2. Si le graphe G n'a pas de cycles, alors le nombre minimal de chaînes élémentaires qui couvrent tous les sommets (ou tous les arcs, lorsque le graphe ne contient pas de sommets isolés) est égal à la somme $\sum_{i \in I} \left] \frac{p(G_i)}{2} \right[$ où par $]a[$ l'on note le plus petit entier plus grand ou égal à a.

DÉMONSTRATION. Parce que le graphe G est sans cycle, chaque composante connexe est un arbre. Il reste de démontrer que le nombre minimal de chaînes maximales qui couvrent un arbre A avec $p(A)$ sommets pendants est égal à $\left] \frac{p(A)}{2} \right[$.

Les sommets terminaux d'une chaîne maximale de l'arbre A sont deux sommets pendants de A. L'on note par $\mathrm{Ch}(A)$ l'ensemble des chaînes maximales de l'arbre A. Nous démontrons d'abord que tout arbre A avec $p(A) \geq 4$ ou $p(A) = 2$ contient une chaîne maximal $\varrho = [x_1, \dots, x_m]$ qui a la propriété suivante: le sous-arbre A_ϱ obtenu par la suppression des sommets de l'ensemble $S(\varrho) \setminus \bigcup_{\substack{\eta \in \mathrm{Ch}(A) \\ x_1, x_m \notin S(\eta)}} S(\eta)$ a le nombre des sommets pendants $p(A_\varrho) = p(A) - 2$.

Si $p(A) = 2$, la propriété est évidente. Dans le cas $p(A) \geq 4$, nous considérons un sommet pendant x_1. En vertu de la propriété de connexité et de l'absence des cycles, ne sont possibles que les situations suivantes:

a) Il y a une chaîne maximale $[x_1, \dots, x_k, \dots, x_m]$ avec les propriétés suivantes: $| \Gamma x_m \cup \Gamma^{-1} x_m | = 1$; $| \Gamma x_i \cup \Gamma^{-1} x_i | = 2$ pour $i \neq 1, k, m$ et $| \Gamma x_k \cup \Gamma^{-1} x_k | \geq 4$.

b) Il y a une chaîne maximale $[x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_m]$ avec les propriétés suivantes: $| \Gamma x_m \cup \Gamma^{-1} x_m | = 1$; $| \Gamma x_i \cup \Gamma^{-1} x_i | \geq 3$ pour $i = k, j$ $(k \neq j)$; $| \Gamma x_i \cup \Gamma^{-1} x_i | = 2$ pour $1 < i < k$ et pour $j < i < m$.

La chaîne $\varrho = [x_1, \dots, x_m]$ déterminée aux points *a*), *b*) vérifie la propriété énoncée ci-dessus. Donc il existe une couverture par des chaînes élémentaires de l'arbre A qui contient $\left] \frac{p(A)}{2} \right[$ chaînes, parce que nous pouvons éliminer deux à deux les sommets pendants et compte tenu qu'un arbre avec 3 sommets pendants est couvert par deux chaînes maximales.

L'on voit que ce nombre est le nombre minimal de chaînes élémentaires maximales d'une couverture, toute chaîne maximale contenant exactement deux sommets pendants, ce qui achève la démonstration.

Ces problèmes de couverture présentent intérêt dans la théorie des réseaux de communications ou pour la construction des tests pour les schémas combinatoires aux éléments binaires, qui réalisent certaines fonctions booléennes [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. ORE, *Theory of Graphs,* Providence, 1962.

[2] M. AIGNER, *On the Linegraph of a Directed Graph,* Math. Zeitschr., 102, (1967), 56-61.

[3] I. TOMESCU, *La construction des tests minimaux pour les fonctions booléennes symétriques,* Calcolo, 1, VI, (1969), 59-68.