Les hypothèses de la MHD

- Le plasma est considéré comme un fluide (et non pas comme une multitude de particules), où toutes les particules ont la même vitesse
- Le plasma est décrit comme un plasma froid
- Une forte conductivité : $E/B \ll 1$

- Description du fluide par des variables moyennes (vitesse, densité, etc.)
- Domaine de validité de la limite basse fréquence et des grandes échelles :
  - $\partial_t \approx 1/\tau \ll \omega_{cj}, \omega_{pe}$
    temps caractéristique τ long par rapport au temps de giration de toutes les particules autour du champ magnétique ($1/\omega_{cj}$) et par rapport au temps de retour vers la quasi-neutralité ($1/\omega_{pe}$) lié au mouvement parallèle des électrons.
  - $\partial_x \approx 1/L \ll 1/\rho_{Lj}, 1/\lambda_{De}$
    l'échelle spatiale des phénomènes grande par rapport au rayon de Larmor de toutes les particules perpendiculairement au champ magnétique et grande par rapport à la longueur de Debye électronique le long de **B**.
- On se limite au cas d'un plasma composé d'électrons (indice +)
  d'ions de charge +e (indices -)
- Les hypothèses de variations lentes permettent de simplifier les équations :
  - L'équation de Maxwell Gauss se réduit à la quasi-neutralité, qui impose :

    $n_+q_+ + n_-q_- = 0$ soit $n_+ = n_- = n$

  - L'équation de Maxwell Ampère montre que la densité de courant est petite à l'ordre 0:

    $n_+q_+v_+ + n_-q_-v_- = 0$ soit $v_+ = v_- = v$

Le système des équations MHD (magnétohydrodynamique)

Avec	**v**	vitesse du fluide
	ρ	masse volumique
	nm	densité
	j = nm**v**	courant de densité massique
	σ	conductivité électrique
	ν	viscosité cinématique

1er Système d'equations :

- Conservation de la masse : $\partial_t\rho + \mathbf{v}.\nabla\rho = -\rho\nabla.\mathbf{v}$
  ou $\partial_t(nm) = -\nabla.\mathbf{j}$
- Conservation de la quantité de mouvement :

Selon la description Lagrangienne : $\mathbf{v}(x(t), y(t), z(t),t)$, on a $d\mathbf{v}/dt = \partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}$

Et à partir de la seconde loi de Newton, on obtient :

$$\rho[\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} + 2\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{v}] = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \rho\nu[\Delta\mathbf{v} + {}^1/_2\nabla(\nabla.\mathbf{v})] + \mathbf{j}\wedge\mathbf{B}$$

Si l'on néglige les termes du second ordre :

$$\rho[\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v} + 2\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{v}] = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mathbf{j}\wedge\mathbf{B}$$

Où l'on a les termes, pour un élément élémentaire de volume, de surface dS :

$\mathbf{j}\wedge\mathbf{B}$	Contribution de la force de Laplace $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B})$
$2\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{v}$	Contribution de la force de Coriolis
$\rho\mathbf{g}$	Contribution de la force gravitationnelle $\delta V\rho\mathbf{g}$
$-\nabla p$	Contribution de la force de pression thermique $-\int p\,\mathbf{dS} = -\delta V\nabla p$

- Conservation de l'énergie :

De l'équation : $\rho\,{}^{d\mathbf{v}}/_{dt} = -\nabla p + \mathbf{j}\wedge\mathbf{B}$

On obtient : $\rho\mathbf{v}.{}^{d\mathbf{v}}/_{dt} = -\mathbf{v}.\nabla p + \mathbf{v}.(\mathbf{j}\wedge\mathbf{B})$

Or
$$\left\{\begin{array}{l} \rho\mathbf{v}.{}^{d\mathbf{v}}/_{dt} = {}^1/_2[{}^{d(\rho v^2)}/_{dt} - v^2.{}^{d\rho}/_{dt}] \\ \mathbf{v}.\nabla p = \nabla.(p\mathbf{v}) - p\nabla.\mathbf{v} \\ \mathbf{v}.(\mathbf{j}\wedge\mathbf{B}) = -\mathbf{j}.(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}) = \mathbf{j}.\mathbf{E} \end{array}\right.$$

En prenant en compte la relation de fermeture :
$$\left\{\begin{array}{l} \rho\mathbf{v}.{}^{d\mathbf{v}}/_{dt} = {}^1/_2[{}^{d(\rho v^2)}/_{dt} - \gamma^{-1}p^{-1}\rho v^2\,{}^{dp}/_{dt}] \\ \mathbf{v}.\nabla p = \nabla.(p\mathbf{v}) + \gamma^{-1}\,{}^{dp}/_{dt} \end{array}\right.$$

D'où $${}^1/_2{}^{d(\rho v^2)}/_{dt} = \mathbf{j}.\mathbf{E} - \nabla.(p\mathbf{v}) - \gamma^{-1}(1 - {}^1/_2 p^{-1}\rho v^2)\,{}^{dp}/_{dt}$$

Les équations de l'électrodynamique :

- Par changement de repère du type x'=x –vt, on obtient $\mathbf{B'} = \mathbf{B}$, $\mathbf{E'} = \mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \approx \mathbf{0}$

  d'où $\mathbf{E} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}$
- La loi d'Ohms :

  $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B})$
- Les équations de Maxwell :
  - Maxwell-Ampère : $\nabla\wedge\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}$

    Et en négligeant le second terme du membre de droite: $\nabla\wedge\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$
  - Maxwell-Faraday : $\nabla\wedge\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}$
  - Maxwell- $\nabla.\mathbf{B} = 0$

On obtient alors l'équation de l'induction : $\partial_t\mathbf{B} = \nabla\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}) + \lambda\nabla^2\mathbf{B}$ $\lambda = (\mu\sigma)^{-1}$

- Une équation d'état, ou de fermeture, adiabatique, (où $\gamma = 5/3$ je crois) :

  ${}^{(p\rho^{-\gamma})}/_{dt}$

2^{nd} Système d'equations :

$$
\begin{cases}
\partial_t(n) + \nabla.(n\mathbf{v}) = 0 & & (1) \\
\partial_t(nm\mathbf{v}) + \nabla.(nm\mathbf{vv} + p\bar{\bar{\mathbf{I}}}) = \mathbf{j}\times\mathbf{B} & \text{où} \quad \mathbf{j} = \nabla\times(\mathbf{B})/\mu_o & (3) \\
\partial_t\left(nm\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{3}{2}p\right) + \nabla.\left[\mathbf{v}\left(nm\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{5}{2}p\right)\right] = \mathbf{j}.\mathbf{E} & \text{où} \quad \mathbf{j} = \nabla\times(\mathbf{B})/\mu_o \text{ et } \mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B} & (1)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\nabla\times(\mathbf{E}) = -\partial_t(\mathbf{B}) \quad \text{où} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B} & (2) \\
\nabla.(\mathbf{B}) = 0 & (1)
\end{cases}
$$

Dans ce système :

- Les variables caractérisent le fluide global
- On a noté $p = p_+ + p_-$ la somme des pressions électronique et ionique, et $m = m_+ + m_-$ la somme des masses (peu différente de la masse ionique).
- La relation de fermeture est supposée adiabatique.
- Le chiffre entre ( ) indique le nombre réel d'équations scalaires.
- **vv** est un tenseur

$$\text{Produit te nsoriel } : \bar{\bar{\mathbf{p}}}_2 = \mathbf{ab} \Leftrightarrow [\mathbf{a}].[\mathbf{b}]^T = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$